Министерство образования Республики Башкортостан
ГАПОУ Стерлитамакский колледж строительства и профессиональных технологий

Учебно – методический комплекс

по дисциплине «Элементы математической логики»

для групп специальности 09.02.03
«Программирование в компьютерных системах»

Разработала преподаватель: Хасанова А. Х.

2020

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА 3
РАЗДЕЛ 1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ 4
РАЗДЕЛ 2. КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 11
РАЗДЕЛ 3. КУРС ЛЕКЦИЙ 15
1. Основные понятия 15
Тема 1.1. Операции над понятиями 15
2. Математическая логика 21
Тема 2.1. Высказывания 21
Тема 2.2. Сложные высказывания 26
Тема 2.3. Минимизация булевых функций 33
Тема 2.4. Операция двоичного сложения 43
Тема 2.5. Полнота множества функций 45
3. Основы теории множеств 52
Тема 3.1. Множества и операции над ними 52
4. Алгебра предикатов 59
Тема 4.2. Логика предикатов 65
Тема 4.3. Индуктивные умозаключения и их виды 73
РАЗДЕЛ 4. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИКУМУ 79
РАЗДЕЛ 5. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ .... **Ошибка! Закладка не определена.**
5.1. Текущий контроль .... **Ошибка! Закладка не определена.**
5.2. Комплект контрольно-оценочных средств .... **Ошибка! Закладка не определена.**
I. Паспорт комплекта контрольно-измерительных материалов **Ошибка! Закладка не определена.**
1.1. Область применения .... **Ошибка! Закладка не определена.**
1.2. Система контроля и оценки освоения программы УД ... **Ошибка! Закладка не определена.**
II. Пакет для обучающихся .... **Ошибка! Закладка не определена.**
2.1. Инструкция для обучающихся .... **Ошибка! Закладка не определена.**
2.2. Задания для оценки освоения умений и усвоения знаний ... **Ошибка! Закладка не определена.**
2.3. Бланк ответов .... **Ошибка! Закладка не определена.**
III. Пакет для эксперта .... **Ошибка! Закладка не определена.**
3.1 Инструкция для эксперта .... **Ошибка! Закладка не определена.**
3.2. Ответы (ключи, модельные ответы) .... **Ошибка! Закладка не определена.**
РАЗДЕЛ 6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ 88
6.1. Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы 88

6.2. Методические рекомендации по организации и методическому сопровождению самостоятельной работы студентов..93

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Элементы математической логики» представляет собой систему нормативной и учебно-методической документации, средств обучения и контроля, необходимых и достаточных для качественной организации освоения образовательной программы, согласно учебного плана.

Целью создания УМК является разработка методического обеспечения учебной дисциплины, а также предоставление студенту полного комплекта учебно-методических материалов для самостоятельного изучения раздела.

При разработке УМК раздела учитывалось, что его компоненты должны:

- предусматривать логически последовательное изложение учебного материала;
- предполагать использование современных методов и технических средств интенсификации учебного процесса, позволяющих студентам глубоко осваивать учебный материал и получать навыки по его использованию на практике;
- соответствовать современным научным представлениям в предметной области;
- обеспечивать межпредметные связи;
- обеспечивать простоту использования для преподавателей и студентов.

Представленный учебно-методический комплекс был разработан в соответствии с ФГОС и апробирован в учебном процессе. Так же был проведен анализ результатов текущего контроля студентов, на основе которого внесены коррективы в содержание учебного материала. В настоящее время разработка УМК завершена. Он содержит:

1. рабочую программу раздела междисциплинарного курса профессионального модуля;
2. календарно – тематический план;
3. учебно-методическое пособие;
4. задания и методические указания по выполнению практических работ;
5. задания для текущего, рубежного и итогового контроля знаний студентов;
6. методические рекомендации по планированию, организации и проведению практических занятий;
7. методические рекомендации по планированию и организации самостоятельной работы студентов;
8. задания для текущего, рубежного и итогового контроля знаний;
9. комплект контрольно – измерительных материалов для проведения дифференцированного зачета.

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Элементы математической логики» может быть использована в профессиональной подготовке специальностей СПО 230000 Информатика и вычислительная техника и в дополнительном профессиональном образовании повышения квалификации и переподготовки кадров в области разработки программного обеспечения.

РАЗДЕЛ 1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

учебной дисциплины «Элементы математической логики»

Область применения программы

Рабочая программа учебной дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности **230115 Программирование в компьютерных системах**, входящей в состав укрупненной группы специальностей СПО **230000 Информатика и вычислительная техника** и может быть использована в дополнительном профессиональном образовании в рамках реализации программ переподготовки кадров в учреждениях СПО.

Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы: дисциплина «Элементы математической логики» является дисциплиной математического и общего естественнонаучного цикла.

Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать**:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;
- формулы алгебры высказываний;
- методы минимизации алгебраических преобразований;
- основы языка и алгебры предикатов

Рекомендуемое количество часов на освоение программы дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося **102** часа, в том числе:

обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося **68** часа;

самостоятельной работы обучающегося **34** часа.

Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	***Объем часов***
Максимальная учебная нагрузка (всего)	***102***
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	***68***
в том числе:	
практические занятия	*18*
контрольные работы	*3*
Самостоятельная работа обучающегося (всего)	***34***
в том числе: - реферирование темы; - решение задач; - выполнение упражнений; - составление опорного конспекта по теме; - составление сводной таблицы; - составление терминологического словаря по теме	 *8* *8* *11* *3* *2* *2*
Итоговая аттестация в форме ***дифференцированного зачета***	

Примерный тематический план и содержание учебной дисциплины «Элементы математической логики»

Наименование разделов и тем		Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работ (проект)	Объем часов	Уровень освоения
1		**2**	**3**	**4**
Раздел 1. Основные понятия			**6**	
Тема 1.1. Операции над понятиями	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Понятие как форма мышления		1
	2	Отношения между понятиями		2
	Самостоятельная работа обучающихся		2	
	1	Составление опорного конспекта по теме «История развития математической логики» ОК 4.1,4.2,4.3.		
Раздел 2. Математическая логика			**57**	
Тема 2.1. Высказывания	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Суждения как форма мышления ОК 6.3.		1
	2	Булевы функции		2
	Самостоятельная работа обучающихся		2	
	1	Составление сводной таблицы «Булевы функции»		
Тема 2.2. Сложные высказывания	**Содержание учебного материала**		6	
	1	Сложные высказывания		2
	2	Формулы алгебры логики		2
	Практические занятия		4	
	1	Решение задач с применением операций над сложными высказываниями ОК 2.1.		
	2	Решение задач на преобразование формул логики ОК 2.2.		
	Самостоятельная работа обучающихся		5	
	1	Решение задач на упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований		
	2	Составление опорного конспекта по теме «Научная деятельность М. Жегалкина» ОК 4.1, 4.2, 4.3.		
Тема 2.3. Минимизация булевых функций	**Содержание учебного материала**		6	
	1	Дизъюнктивные нормальные формы, конъюнктивные нормальные формы		2
	2	Совершенные формы		2
	3	Логические схемы		2
	Практические занятия		4	
	1	Представление булевой функции в виде совершенной ДНФ, совершенной КНФ, минимальной ДНФ		
	3	Построение логических схем ОК 2.1, ОК 3.1, ОК 3.2, ОК 3.3, ОК 8.1		
	Самостоятельная работа обучающихся		5	
	1	Выполнение упражнений на составление таблицы истинности по логической схеме ОК 2.1, ОК 3.1,		
	2	Выполнение упражнений на синтез логических устройств в заданном базисе логических элементов ОК 8.1		

1	2		3	4
Тема 2.4. Операция двоичного сложения	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Свойства операции двоичного сложения		1
	2	Полином Жегалкина		2
	Практические занятия		2	
	2	Представление булевых функций в виде полинома Жегалкина		
	Самостоятельная работа обучающихся		3	
	1.	Выполнение упражнений на представление булевых функций в виде полинома Жегалкина		
Тема 2.5. Полнота множества функций	**Содержание учебного материала**		6	
	1	Свойства бинарных отношений		1
	2	Функциональная замкнутость		2
	3	Важнейшие замкнутые классы		2
	Практические занятия		1	
	1	Исследование булевой функции на принадлежность к к классам T0, T1, L, M, S		
	Контрольная работа		1	
	1	Выполнение контрольных заданий по разделу «Математическая логика» ОК 6.4.		
	Самостоятельная работа обучающихся		4	
	1	Реферирование темы «Биография Чарльза Пирса» ОК 4.1, 4.2, 4.3.		
	2	Реферирование темы «Научная деятельность Пьера Ферма». ОК 4.1, 4.2, 4.3.		
Раздел 3. Основы теории множеств			**9**	
Тема 3.1. Множества и операции над ними	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера		2
	2	Соответствие между множествами		2
	Практические занятия		2	
	1	Решение задач на применение теоретико-множественных операций над множествами; основных принципов теории алгоритмов		
	Самостоятельная работа обучающихся		3	
	1	Решение задач на выполнение операций над множествами		
Раздел 4. Алгебра предикатов			**28**	
Тема 4.1. Формальные системы и умозаключения	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Умозаключения как форма мышления		1
	2	Умозаключения из сложных суждений		2
	Практические занятия		2	
	1	Применение аппарата алгебры высказываний для работы с умозаключениями		
	Самостоятельная работа обучающихся		3	
	1	Решение задач на составление сложных суждений ОК 2.1, ОК 3.1, ОК 3.2, ОК 3.3, ОК 8.1		

1	2		3	4
Тема 4.2. Логика предикатов	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Исчисление предикатов		2
	2	Формализация предложений с помощью логики предикатов		2
	Практические занятия		2	
	1	Определение логического значения для высказываний типа $\forall x P(x), \exists x P(x), \forall x \exists y P(x,y), \exists x \forall y P(x,y)$. Построение отрицания к предикатам ОК 2.1, ОК 3.1, ОК 3.2, ОК 3.3, ОК 8.1		
	Самостоятельная работа обучающихся		3	
	1	Выполнение упражнений на формализацию предложений с помощью логики предикатов		
	2	Выполнение упражнений на построение отрицания к предикатам ОК 2.1, ОК 3.1, ОК 3.2, ОК 3.3		
Тема 4.3. Индуктивные умозаключения и их виды	**Содержание учебного материала**		4	
	1	Методы установления причинных связей		1
	2	Метод математической индукции		2
	Практические занятия		1	
	1	Решение задач методом математической индукции ОК 2.1, ОК 3.1, ОК 3.2, ОК 3.3, ОК 8.1		
	Контрольная работа		1	
	1	Выполнение контрольных заданий по разделу «Алгебра предикатов»		
	Самостоятельная работа обучающихся		4	
	1	Составление терминологического словаря ОК 4.1, 4.2, 4.3.		
	2	Реферирование темы «Метод Милля установления причинно-следственных связей» ОК 4.1, 4.2, 4.3.		
Дифференцированный зачет	**Содержание учебного материала**		**2**	
	1	Выполнение тестовых заданий по всем разделам учебной дисциплины		2

Условия реализации учебной дисциплины
«Элементы математической логики»

Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация программы дисциплины предполагает наличие кабинета математических дисциплин.

Оборудование учебного кабинета и рабочих мест кабинета:

- посадочные места по количеству обучающихся;
- рабочее место преподавателя;
- комплект учебно-методической документации;
- комплект наглядных пособий и макетов по дисциплине;
- доска для записей;

Технические средства обучения:

- точки электропитания для подключения ПК;
- мультимедийное оборудование;
- широкоформатный экран;
- источники бесперебойного питания;
- интерактивная доска

Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Хоменко, И. В. Основы логики. Учебник и практикум для СПО. - М.: Юрайт, 2016. - 328 с. (в процессе приобретения)
2. Спирина М. С., Спирин П.А. Дискретная математика. - М.: Академия, 2018.-368 с. (в процессе приобретения)
3. Спирина М. С., Спирин П.А. Дискретная математика. Сборник задач с алгоритмами решений - М.: Академия, 2018.-288 с. (в процессе приобретения)

Дополнительные источники:

1. Гончарова Г.А. Элементы дискретной математики: учебник для ССУЗ. – М.: ФОРУМ :ИНФРА- М, 2004.-128 с.
2. Челпанов, Г. И. Учебник логики. - М.: Либроком, 2016. - 264 с.
3. Струве, Г. Е. Элементарная логика. - М.: Либроком, 2015. - 168 с.

Интернет - ресурсы

1. Математическая логика: http://www.mathlog.h11.ru/logika.htm
2. Введение в математическую логику: http://lpcs.math.msu.su/vml2009/
3. Дискретная математика: http://www.univer.omsk.su/departs/compsci/kursi/disc/fr_logic.htm

Контроль и оценка результатов освоения дисциплины «Элементы математической логики»

Контроль и оценка результатов освоения дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий и лабораторных работ, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий, проектов, исследований.

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	**Формы и методы контроля и оценки результатов обучения**
В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**	
формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.	Оценка продукта учебной деятельности (решённой задачи) по критериям (использование соответствующего алгоритма, отсутствие ошибок в алгоритме решения) на дифференцированном зачете
В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать:**	
основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов	Оценка результатов стандартизованного тестирования сопоставлением с эталоном (ключом, модельным ответом) на дифференцированном зачёте.
формулы алгебры высказываний; методы минимизации алгебраических преобразований	
основы языка и алгебры предикатов	

РАЗДЕЛ 2. КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

учебной дисциплины «Элементы математической логики»

Наименование разделов, тем	Количество часов	Дата проведения	№ занятия	Вид занятия	Оборудование занятия	Самостоятельная работа студентов	Домашнее задание
Раздел 1. Основные понятия	**4**						
Тема 1.1. Операции над понятиями	**4**						
1.1.1. Ознакомление с формами промежуточной и итоговой аттестации. Понятие как форма мышления	2		1	Комбинированный урок	Раздаточный материал	Составление опорного конспекта по теме	Составление опорного конспекта по теме «Операции над понятиями»
1.1.2. Отношения между понятиями	2		2	Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Выполнение упражнений на операции над понятиями	
Раздел 2. Математическая логика	**36**						
Тема 2.1. Высказывания	**4**						
2.1.1. Суждения как форма мышления	2		3	Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Составление опорного конспекта по теме	Составление сводной таблицы «Булевы функции»
2.1.2. Булевы функции	2		4	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Выполнение упражнени на построение геометрич ской интерпретации логи ческой функции	
Тема 2.2. Сложные высказывания	**8**						
2.2.1. Сложные высказывания	2		5	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Выполнение упражнений на построение сложных высказываний	Составление опорного конспекта по теме «Научная деятельность М. Жегалкина»
2.2.2. Формулы алгебры логики	2		6	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Выполнение упражнений	
Решение задач с применением опера-	2		7	Практическая работа	Раздаточный ма-	Выполнение практиче-	Решение задач на упроще-

Наименование разделов, тем	Количество часов	Дата проведения	№ занятия	Вид занятия	Оборудование занятия	Самостоятельная работа студентов	Домашнее задание
ций над сложными высказываниями					териал	ской работы	ние формул логики с помощью равносильных преобразований
Решение задач на преобразование формул логики	2		8	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	
Тема 2.3. Минимизация булевых функций	**10**						
2.3.1.Дизъюнктивные нормальные формы, конъюнктивные нормальные формы	2		9	Комбинированный урок	Меловая доска для записей		Выполнение упражнений на составление таблицы истинности по логической схеме
2.3.2. Совершенные формы	2		10	Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Выполнение упражнений на построение СДНФ и СКНФ	
2.3.3.Логические схемы	2		11	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Выполнение упражнений на построение логической схемы по заданной булевой функции	
Представление булевой функции в виде совершенной ДНФ, совершенной КНФ, минимальной ДНФ	2		12	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	Выполнение упражнений на синтез логических устройств в заданном базисе логических элементов
Построение логических схем	2		13	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	
Тема 2.4. Операция двоичного сложения	**6**						
2.4.1.Свойства операции двоичного сложения	2		14	Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Доказательство свойства операции двоичного сложения	
2.4.2.Полином Жегалкина	2		15	Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Выполнение упражнений на представление булевой функции в виде полинома Жегалкина	Выполнение упражнений на представление булевых функций в виде полинома Жегалкина
Представление булевых функций в виде полинома Жегалкина	2		16	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	

Наименование разделов, тем	Количество часов	Дата проведения	№ занятия	Вид занятия	Оборудование занятия	Самостоятельная работа студентов	Домашнее задание
Тема 2.5. Полнота множества функций	**8**						
2.5.1.Свойства бинарных отношений	2		17	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Составление опорного конспекта по теме	Реферирование темы «Биография Чарльза Пирса»
2.5.2. Функциональная замкнутость	2		18	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Составление опорного конспекта по теме	
2.5.3.Важнейшие замкнутые классы	2		19	Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Составление опорного конспекта по теме	Реферирование темы «Научная деятельность Пьера Ферма»
Исследование булевой функции на принадлежность к классам T0, T1, L, M, S	1		20	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	
Контрольная работа	1						
Раздел 3. Основы теории множеств	**6**						
Тема 3.1. Множества и операции над ними	**6**						
3.1.1. Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера	2		21	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Выполнение упражнений на выполнение операций над множествами	
3.1.2. Соответствие между множествами	2		22	Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Составление опорного конспекта по теме	Решение задач на выполнение операций над множествами
Решение задач на применение теоретико-множественных операций над множествами; основных принципов теории алгоритмов	2		23	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	
Раздел 4. Алгебра предикатов	**18**						
Тема 4.1. Формальные системы и умозаключения	**6**						
4.1.1.Умозаключения как форма мышления	2		24	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Составление опорного конспекта по теме	
4.1.2. Умозаключения из сложных	2		25	Комбинирован-	Меловая доска	Выполнение упражне-	Решение задач на состав-

Наименование разделов, тем	Количество часов	Дата проведения	№ занятия	Вид занятия	Оборудование занятия	Самостоятельная работа студентов	Домашнее задание
суждений				ный урок	для записей	ний на составление умозаключений	ление сложных суждений
Применение аппарата алгебры высказываний для работы с умозаключениями	2		26	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	
Тема 4.2. Логика предикатов	**6**						
4.2.1. Исчисление предикатов	2		27	Комбинированный урок	Мультимедийный проектор	Составление опорного конспекта по теме	Выполнение упражнений на формализацию предложений с помощью логики предикатов
4.2.2. Формализация предложений с помощью логики предикатов	2		28	Комбинированный урок	Раздаточный материал	Составление опорного конспекта по теме	
Определение логического значения для высказываний типа $\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$, $\forall x\exists yP(x,y)$, $\exists x\forall yP(x,y)$ Построение отрицания к предикатам ОК 2.1, ОК 3.1, ОК 3.2, ОК 3.3, ОК 8.1	2		29	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	Выполнение упражнений на построение отрицания к предикатам
Тема 4.3. Индуктивные умозаключения и их виды	**4**						
4.3.1. Методы установления причинных связей	1		30	Комбинированный урок	Раздаточный материал	Составление опорного конспекта по теме	Составление терминологического словаря
4.3.2. Метод математической индукции	1			Комбинированный урок	Меловая доска для записей	Выполнение упражнений на применение метода математической индукции	
Решение задач методом математической индукции	1		31	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение практической работы	Реферирование темы «Метод Милля установления причинно-следственных связей»
Контрольная работа	1						
Дифференцированный зачет	**2**						
Выполнение тестовых заданий по всем разделам учебной дисциплины	2		32	Практическая работа	Раздаточный материал	Выполнение тестовых заданий	
Всего	**64**	**Теоретич.-42 ч. Практич. -22 ч.**					

РАЗДЕЛ 3. КУРС ЛЕКЦИЙ

по учебной дисциплине «Элементы математической логики»

1. Основные понятия

Тема 1.1. Операции над понятиями

1.1.1. Понятие как форма мышления

...Настоящий математик работает не с числами, а с понятиями.

Я. Стюарт

Логика как наука возникла в трудах выдающегося древнегреческого мыслителя Аристотеля (384—322 до н.э.). Традиционная аристотелева логика называется **классической** или формальной и соответствует *первому периоду* развития этой науки. Объектами изучения такой логики являются различные формы мышления — понятия, суждения, умозаключения, их виды и операции над ними, законы логики, доказательства и опровержения, гипотезы и т.д. Наряду с Аристотелем, тщательно разработавшим теорию дедуктивных умозаключений и доказательств, в классическую логику входит индуктивная логика, родоначальником которой является крупнейший английский философ и естествоиспытатель Фрэнсис Бэкон (1561 — 1626). Значительный вклад в развитие классической логики внес также великий французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650).

Второй период развития логики как науки связан с работами знаменитого немецкого философа и математика Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716), целью которого было создание «азбуки понятий» и применение логики для теоретического обоснования математики. С другой стороны, у Лейбница возникла идея придать рассуждениям вид вычислений. Для этого он хотел поставить символы в соответствие понятиям и получить верные выводы в рассуждениях с помощью некоторых алгебраических операций. Стремясь облегчить процесс мышления, он старался смотреть на классическую логику через призму математики.

Мечты Лейбница частично удалось воплотить в жизнь ирландскому математику и логику Джорджу Булю (1815 — 1864), который создал алгебру логики. В этой науке свои операции и законы похожи на привычные математические. В этом разделе математики, получившем название *булева алгебра,* буквами обозначают высказывания как элементы множества высказываний. С помощью логических операций из простых элементарных высказываний строят составные, определяют, истинны они или ложны/

Наиболее характерной особенностью современного *третьего периода* развития логики является применение новых методов для исследования как традиционных, так и вновь выявленных логических проблем, связанных с появлением ЭВМ и информатизацией общества.

Связь между математикой и логикой.

И логика, и математика уделяют большое внимание работе с понятиями. В логике **понятие** рассматривается как форма мышления, отражающая предметы в их существенных признаках. Понятия — это наши знания о некоторых предметах и явлениях окружающего мира или о множестве сходных объектов. Глубинный смысл этих знаний заключается в установлении *отношений* между исследуемым понятием и другими объектами или идеями. Причем для выявления этих отношений мы используем *суждения,* т.е. мысли, связывающие понятия между собой. Именно с помощью суждений раскрывается сущность исследуемых понятий. В свою очередь, суждения и их упрощенная модель — высказывания — являются объектом изучения математической логики.

В связи с тем, что понятия естественного языка многозначны, часто приходится уточнять их определения в информации разного вида.

Так, «квадрат» может быть и геометрической фигурой (прямоугольником с равными сторонами), и второй степенью числа или алгебраического выражения. Например, плоскость $R^2 = R \times R$ — декартово произведение двух прямых, а сам квадрат (фигура) — это квадрат двух отрезков: $[0, a] \times [0, a]$.

Различные науки изучают одни и те же предметы и явления в зависимости от собственных интересов. Они как окна, через которые люди смотрят на объект изучения. Так, математика будет изучать количество кусочков мела, их форму, установит их размеры, площадь поверхности, объем. Физика будет изучать, с какой скоростью мел упадет на пол, как при этом он деформируется, какие силы действуют на мел при его скольжении по поверхности доски и т.д. Химия заинтересуется строением мела как вещества, его способностью изменяться при воздействии высокой температуры и т.д. Иначе говоря, любой предмет обладает различными признаками, но для каждой конкретной науки одни признаки будут существенными, а другие — несущественными. Признаки предмета — это те особенности, которые присущи данному предмету и отличают его от других.

Предметы составляют объективную реальность, существующую независимо от сознания человека. Но человек каждому предмету поставил в соответствие слово, термин, понятие, отличающее этот предмет от других. Причем реальные предметы и предметы мысли принадлежат к разным областям действительности: реальные предметы к объективному, а предметы мысли — к субъективному миру человека.

Итак, **понятие** — это форма мышления, отражающая предметы в их существенных общих признаках. Каждый из признаков необходим для описания некоторого понятия, а все вместе они достаточны для того, чтобы с их помощью отличить данное понятие от других из общего множества однородных объектов.

Под **признаком** обычно понимают свойства и отношения реальных вещей, выраженные в этом понятии.

Логические приемы формирования понятий.

Для формирования понятий используются следующие мысленные логические приемы.

Анализ — мысленное расчленение объектов (явлений, процессов) на их составные части, выделение в них признаков.

Синтез — соединение частей или признаков в единое целое.

Сравнение — установление сходства или различия объектов по существенным или несущественным признакам.

Абстрагирование — выделение одних признаков и отвлечение от других (чаще всего — выделение существенных и отказ от несущественных признаков).

Обобщение — объединение однородных объектов в класс.

Логические характеристики понятий.

Любое понятие имеет логическую структуру, включающую в себя объем и содержание — основные логические характеристики понятия.

Содержание понятия характеризует совокупность существенных признаков предмета, отраженных в понятии. Например, содержание понятия «молекула» составляет ее основной отличительный признак — быть мельчайшей частицей вещества, отражающей его физические и химические свойства.

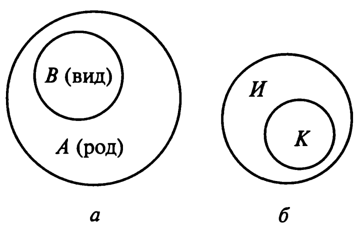
Содержание понятия «квадрат» составляют его отличительные признаки: «быть прямоугольником и иметь равные стороны», либо «быть ромбом и иметь прямые углы».

Объем понятия есть множество всех предметов, которые мыслятся в данном понятии. Объем понятия «столицы государств» определяется перечислением всех столиц: Москва, Париж, Лондон, Пекин и т.д. Объем понятия «стороны горизонта» составляют восток, запад, север и юг.

Для краткой лаконичной записи взаимоотношений, взаимосвязей между различными понятиями будем использовать язык теории множеств и теории графов.

Пусть объем одного понятия входит в объем другого. Из двух понятий *А* и *В* назовем **родовым** понятием то из них *(А), для* которого объем *больше,* а **видовым** то *(В),* объем которого *меньше: В а А* (рис. 1, *а).*

Закон обратного отношения между объемом и содержанием понятий. Взаимосвязь между логическими характеристиками понятия, его объемом и содержанием, выражает закон обратного отношения. ***Чем шире объем понятия, тем уже его содержание, и, наоборот, чем шире содержание, тем уже объем.*** **Это значит, что чем меньше** информации о предмете, заключенном в понятии, тем шире класс предметов, соответствующих этому понятию. Например, «игры» *(И)* — понятие более широкое, чем «компьютерные игры» *(К).*



а *б*

Закон обратного отношения между объемом и содержанием понятия: *а* — соотношение между родовыми и видовыми понятиями; *б* —*К* ⊂ *И*

Поэтому объем понятия *И* шире, чем объем понятия *К*: $К \subset И$ (рис. 1, б).

Другой пример. Свидетель ДТП видел, что автомобиль, сбивший пешехода и скрывшийся с места
преступления, был «девяткой»цвета «мокрый асфальт». А другой свидетель запомнил две первые цифры номера: эта дополнитель-ная информация (содержание шире)
значительно сузила круг возможных автомобилей, причастных к ДТП (объем уже).

На рис. 2 показано: *А* — множество автомобилей, *В* — множество «девяток» цвета «мокрый асфальт» (это пересечение множества всех «девяток» и множества машин цвета «мокрый асфальт»), *С* — множество автомобилей с подобными первыми цифрами.

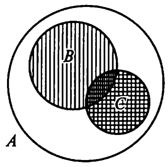


Иллюстрация отношения между понятиями.

Логические операции над понятиями: обобщение и ограничение понятий.

В наших рассуждениях вообще, при изучении точных наук в частности, велика роль *ограничений* и *обобщений* понятий.

Под **ограничениями** понимается переход от рассмотрения изучаемого *множества* к рассмотрению его *подмножества.*

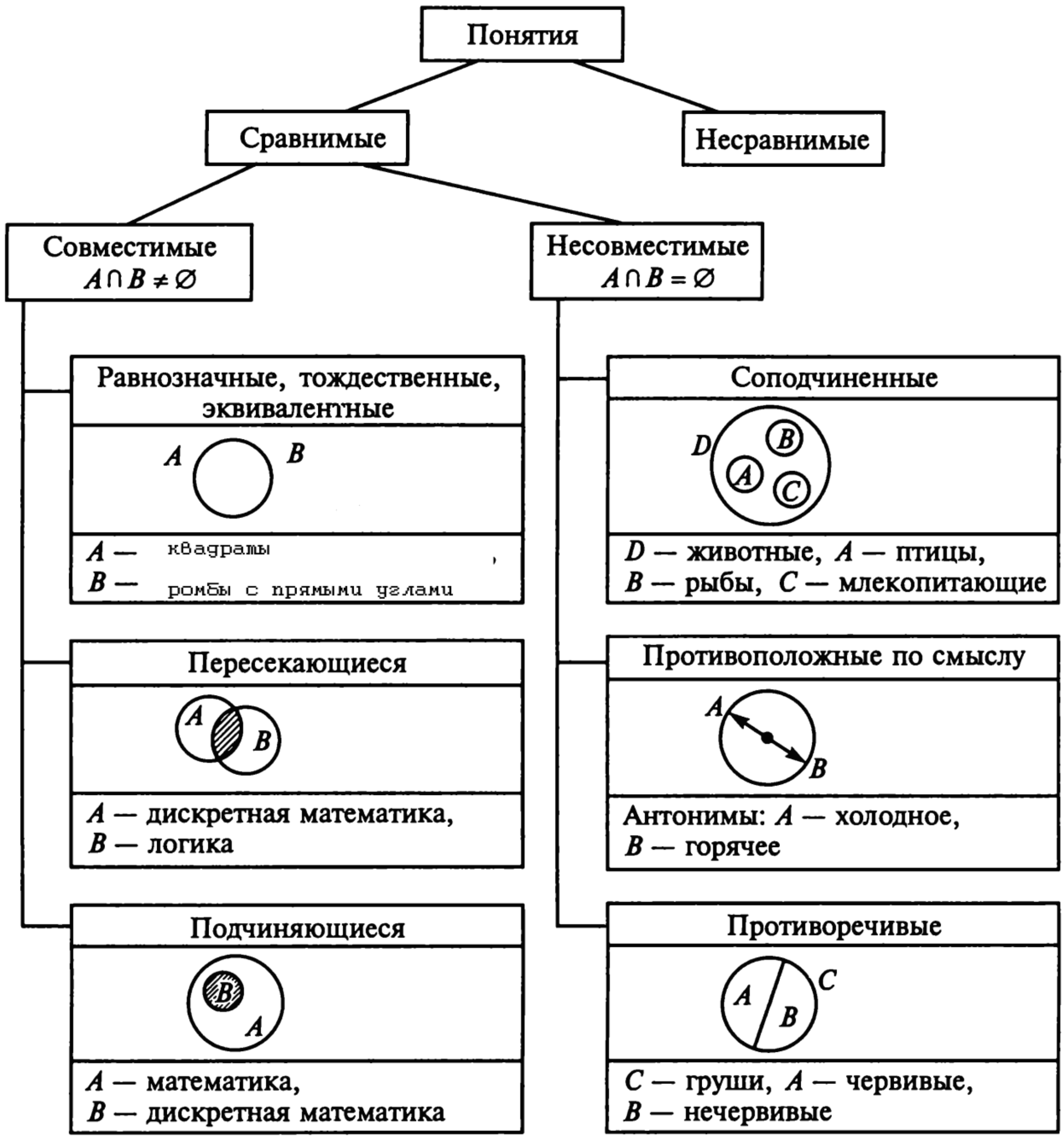
Обобщением является обратная логическая операция, которая осуществляет переход от рассмотрения данного множества к рассмотрению более широкого множества, содержащего данное.

Операция обобщения, заключающаяся в переходе от видового к родовому понятию, сопровождается отказом от отдельных существенных признаков понятия. Так, если общее понятие — наука (все множество различных наук), то одно из ее подмножеств — математика. В свою очередь математика разделяется на отдельные предметные области, одной из которых является геометрия — наука, изучающая пространственные фигуры и отношения между ними. Та часть геометрии, которая изучает фигуры и их отношения на плоскости, называется планиметрией.

1.1.2. Отношения между понятиями

Понятия, как и предметы или идеи, им соответствующие, находятся в определенных отношениях, взаимосвязях друг с другом.

Если содержания понятий имеют общие признаки, они называются **сравнимыми.** Например, телевидение и радио — понятия сравнимые, так как имеют общий признак — они являются средствами массовой информации. Компьютер и снегопад — далекие, несравнимые понятия.



Классификация отношений между понятиями

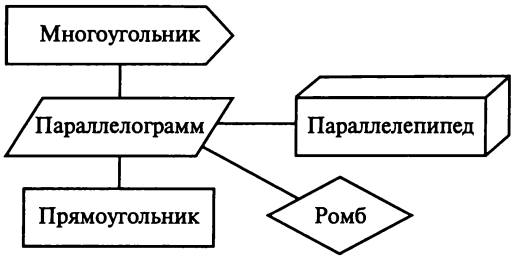
Одной из наиболее характерных особенностей современной математики является ее высокая степень *абстрагирования.* Понятие объединяет множество объектов, обладающих определенными свойствами.

Некоторая абстрактная теория выводит следствия из этих свойств, которые впоследствии можно будет применить к любому объекту этого множества. Абстрагирование достигается за счет выполнения логической операции *обобщения.* Благодаря обобщению мы переносим свойства одного объекта на свойство другого, с ним родственного.

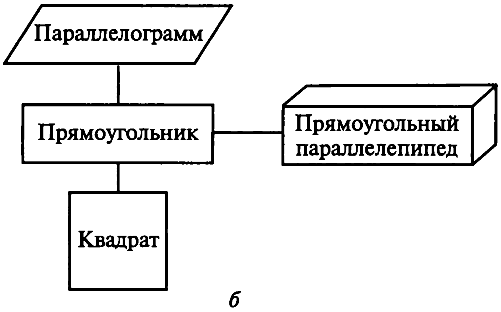
Так, доказав, что в данном прямоугольном треугольнике, имеющем стороны длиной 3, 4 и 5, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, мы обобщаем этот вывод сначала на все прямоугольные треугольники со сторонами, пропорциональными этим числам («египетский треугольник» вида $(3k)^2 + (4k)^2 = = (5k)^2$), а затем на произвольный прямоугольный треугольник, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$.

Для понятия «параллелограмм» аналогичными, т.е. обладающими сходными свойствами, будет понятие «параллелепипед» (и в меньшей степени — «прямая призма»).

Обобщением понятия «параллелограмм» является многоугольник, а ограничением — виды параллелограмма, например ромб или прямоугольник (см. рис.).



а



б

Примеры изображения логических операций для понятий:
***а* — параллелограмм; *б* — прямоугольник**

Действительно, параллелограмм и параллелепипед обладают сходными свойствами:

противоположные стороны (грани)— равны и параллельны;

противоположные углы (углы с соответственно параллельными сторонами) равны.

Аналогично, для понятия «прямоугольник» обобщением является параллелограмм, ограничением — квадрат. Сходными свойствами обладает прямоугольный параллелепипед (см. рис.).

Логические операции *обобщения, ограничения,* а также *аналогия* являются необходимым «мыслительным инструментарием» любого ученого. Владение этими операциями может пригодиться каждому человеку для переноса информации с одного объекта на другой. Особенно важны эти приемы для учащихся, так как помогают приобретать знания с меньшими затратами, используя не только память, но и логику. Мы применяем аналогию для сжатия представленной информации в тех случаях, когда записываем аналогичные определения в виде дроби.

2. Математическая логика

Тема 2.1. Высказывания

2.1.1. Суждения как форма мышления

Я знаю только то, что я ничего не знаю, другие не знают и этого.

Сократ

Суждением называется форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о *существовании* предмета, *связях* между предметом и его свойствами или об *отношениях* между предметами.

Словам естественного языка, например русского, в логике соответствуют понятия. Слова объединяются в предложения. По интонации предложения делятся на вопросительные, восклицательные и повествовательные. Но информацию несут только повествовательные предложения. Таким предложениям в логике соответствуют суждения. Они выражают наши знания о связях между понятиями. Суждение характеризуют две стороны: его форма и его истинность. Отвлечемся от формы и рассмотрим вопрос о том, *истинно* оно или *ложно.*

Под **высказыванием** понимается любое предложение, в отношении которого имеет смысл утверждение о его истинности или ложности. Каждое высказывание либо истинно либо ложно. Значение «истина» обозначается 1, значение «ложь» - 0.

Примеры:

Дважды два – пять

Уфа – столица Башкортостана

Рассмотрим примеры повествовательных предложений.

1. Умение грамотно использовать логические операции повышает эффективность программирования.
2. История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий.
3. Знание математической логики необходимо любому специалисту.
4. Математическая логика — увлекательная наука.
5. $x> 5$.
6. Была метель.
7. Он — программист.

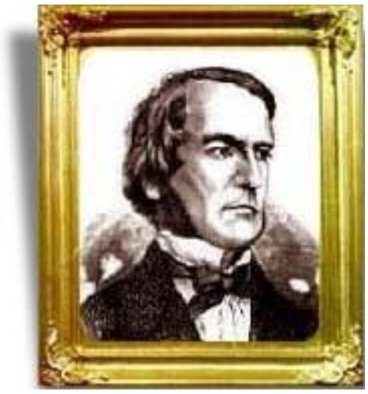
Предложения 1, 2, 3 являются высказываниями, а 4 и 5 — нет. Однозначно для всех людей определить отношение к науке невозможно, так же как невозможно определить истинность неравенства $x> 5$, не зная значений переменной x, входящей в него. Не является высказыванием и предложение 6, так как нет достаточной информации, чтобы установить, истинно оно или ложно (где и когда?). Однако предложение $x > 5$ может стать высказыванием, если будут известны конкретные значения переменной x. Так, если задать множество значений x: $x \in \{0, 2, 5, 7, 12\}$, то высказывания 0>5, 2>5, 5>5 будут ложными, а 7>5, 12 > 5 — истинными. Истинными будут высказывания 1 и 2, ложным — третье, так как есть множество профессий, для которых знания математической логики не обязательны. Предложение «Он — программист» станет высказыванием при подстановке вместо местоимения «он» имени отдельного человека. Используя кванторные слова «всякий», «некоторый», «есть» и др., тоже можно получить высказывания. Например, «Всякий человек есть программист» — ложное высказывание. Заметим, что предложения вида 5 и 7 подробно изучает логика предикатов, с которой мы познакомимся позже.

Формализацией высказываний называют операцию замены высказывания естественного языка формулой математического языка, включающего высказывательные переменные и символы тех логических операций, которые соответствуют структуре самого высказывания.

2.1.2. Булевы функции

Мы употребляем знаки не только для того, чтобы передавать наши мысли другим людям, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления.

Г. В. Лейбниц



Джордж Буль
George Boole
(02.11.1815 – 08.12.1864)

Джордж Буль родился в Линкольне (Англия) в семье мелкого торговца. Материальное положение его родителей было тяжелым, поэтому Джордж смог окончить только начальную школу для детей бедняков; в других учебных заведениях он не учился. Этим отчасти и объясняется, что , не связанный традицией, он пошел в науке собственным путем. Буль самостоятельно изучил латынь, древнегреческий, немецкий и французский языки, изучил философские трактаты. С ранних лет Буль искал работу, оставляющую возможности для самообразования. После многих неудачных попыток Булю удалось открыть маленькую начальную школу, в которой он преподавал сам. Школьные учебники по математике привели его в ужас своей нестрогостью и нелогичностью, Буль вынужден был обратиться к сочинениям классиков науки и самостоятельно проштудировать обширные труды Лапласа и Лагранжа.

В связи с этим занятием у него появились первые самостоятельные идеи. Результаты своих исследований Буль сообщил в письмах профессорам математики (Д.Грегори и А.де Моргану) знаменитого Кембриджского университета и вскоре получил известность как оригинально мыслящий математик. В 1849 году в г.Корк (Ирландия) открылось новое высшее учебное заведение – Куинз колледж, по рекомендации коллег-математиков Буль получил здесь профессуру, которую сохранил до своей смерти в 1864 году.

Только здесь он получил возможность не только обеспечить родителей, но и спокойно, без мыслей о хлебе насущном, заниматься наукой. Здесь же он женился на дочери профессора греческого языка Мери Эверест, которая помогала Булю в работе и оставила после его смерти интересные воспоминания о своем муже; она стала матерью четырех дочерей Буля, одна из которых, Этель Лилиан Буль, в замужестве Войнич, - автор популярного романа "Овод".

Джордж Буль по праву считается отцом математической логики. Его именем назван раздел математической логики - булевая алгебра. В 1848 году Джордж Буль опубликовал статью по началам математической логики - "Математический анализ логики, или Опыт исчисления дедуктивных умозаключений", а в 1854 году появился главный его труд "Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей". В этих работах отразилось убеждение Буля о возможности изучения свойств математических операций, осуществляемых не обязательно над числами. Ученый говорил о символическом методе, который он применял как к изучению дифференцирования и интегрирования, так и к логическому выводу и к теоретико-вероятностным рассуждениям. Именно он построил один из разделов формальной логики в виде некоторой "алгебры", аналогичной алгебре чисел, но не сводящейся к ней.

Буль изобрел своеобразную алгебру - систему обозначений и правил, применимую ко всевозможным объектам, от чисел до предложений. Пользуясь этой системой, он мог закодировать высказывания (утверждения, истинность или ложность которых требовалось доказать) с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими, подобно тому как в математике манипулируют числами. Основными операциями булевой алгебры являются конъюнкция (И), дизъюнкция (ИЛИ), отрицание (НЕ). Через некоторое время стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания электрических переключателей схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.

Алгебра логики, выстроенная в XIX в., долго существовала как абстрактная, хотя и очень красивая наука. Но в середине XX в. оказалось, что она имеет конкретное и очень важное применение в современной жизни. Булева алгебра в настоящее время служит основой для описания логики работы аппаратных и программных средств ЭВМ. Дело в том, что алгебра логики использует логические переменные, которые принимают лишь два значения 0 и 1. Аналогично ЭВМ, используя лишь сигналы 0 и 1, воспринимает их как двоичные числа или логические переменные.

Алгебра логики (булева алгебра)– это раздел математической логики, значения всех элементов которой определены в двухэлементном множестве. Алгебра логики оперирует логическими высказываниями.

Булевы переменные (логические переменные) – это переменные, имеющие только два значения false (ложь) и true (истина).

Булевой (логической) функцией называется такая функция, аргументами которой являются булевы переменные, и сама функция принимает значение из множества ноль и единица.

Простейшими операциями алгебры логики являются операции логического сложения (дизъюнкция, операция ИЛИ), логического умножения (конъюнкция, операция И). Для обозначения логического сложения используются символы «+», «$\vee$», для логического умножения – «·», «$\wedge$». В алгебре логики используется еще одна операция- операция отрицания (инверсия, операция НЕ). Обозначается $\overline{\alpha}$, $\neg\alpha$

Примеры.

Пусть a и b – некоторые высказывания, тогда логические операции над высказываниями записываются следующим образом:

a+b или $a \vee b$

a·b или $a \wedge b$

$\overline{a}$ или $\neg a$

Пусть переменная *x* логическая переменная, т. е. может принимать одно из 2-х возможных значений: «истина» (1), «ложь» (0). Тогда функция от переменной x называется логической функцией.

Пример.

$F(x_1, x_2)=x_1 \wedge \overline{x}_2$

$f(x)=\overline{x}$

Элементарные логические функции задаются табличным способом, то есть для каждой логической функции строится так называемая таблица истинности.

1) **Инверсия**. *Инверсией* (логическим “*не*”) высказывания P называется высказывание, которое истинно только тогда, когда высказывание P ложно. Обозначается $\neg$ P или $\overline{P}$.

Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

P	$\neg$ P
1	0
0	1

2) **Конъюнкция.** *Конъюнкцией* (логическим “*и*”) двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Обозначается P&Q или $P \wedge Q$.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3) **Дизъюнкция.** *Дизъюнкцией* (логическим “*или*”) двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Обозначается $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4) **Импликация.** *Импликацией* (логическим *следованием*) двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а Q – ложно. Обозначается $P \supset Q$ (или $P \rightarrow Q$). Высказывание P называется посылкой импликации, а высказывание Q – следствием.

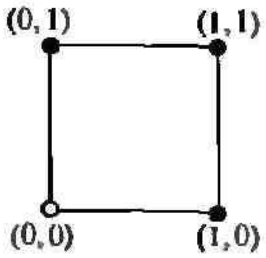
P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

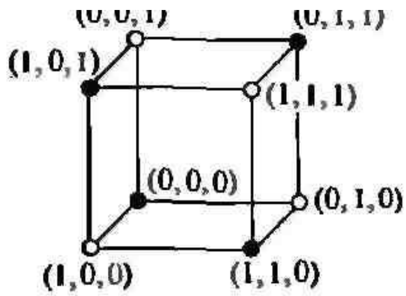
5) **Эквиваленция.** *Эквиваленцией* (логической *равносильностью*) двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают. Обозначается P~Q или $P \leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Для рассмотрения свойств булевых функций воспользуемся их геометрической интерпретацией. Рассмотрим различные наборы аргументов функции f $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Такие наборы называются **булевыми векторами.** Поставим в соответствие булевым векторам определенные точки n-мерного пространства. Тогда множеству 2^n двоичных наборов соответствует множество вершин n-мерного единичного куба. Припишем каждой вершине конкретное значение 0 или 1, которое принимает булева функция при соответствующем наборе аргументов. Если значение функции равно 0, то точка не рисуется («выкалывается»), если значение функции равно 1, то точка рисуется. Такой *n*-мерный куб будет однозначно задавать любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с n переменными. Например, для двух переменных геометрическая интерпретация булевой функции будет на плоскости иметь вид квадрата или «двумерного» куба, а для трех переменных — куба в пространстве.

Два булевых вектора называются *соседними*, если их координаты отличаются только в одном разряде (если они отличаются только одной координатой).





Упражнения

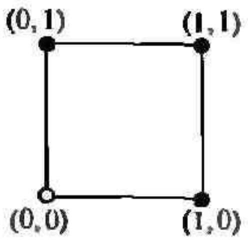
1. Постройте геометрическую интерпретацию булевых функций:

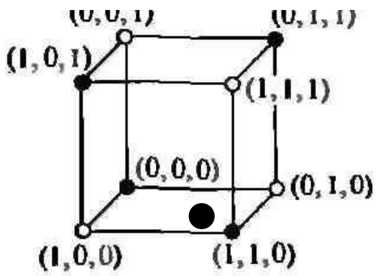
а) $f_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge x_3$;

б) $f_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_1$

2. Постройте таблицу истинности для функции, заданной графически:

а) б)





Тема 2.2. Сложные высказывания

2.2.1. Сложные выскаывания

Сложные предложения в русском языке образуются из простых путем связок *(и, а, если... то* и т.д.). Сложные высказывания в логике образуются из простых путем логических операций, соответствующих определенным связкам естественного языка. Истинность или ложность сложного высказывания являются функциями простых высказываний, входящих в его состав. Зная истинность простых суждений, можно установить истинность сложных суждений.

В русском языке сложные предложения получают из двух других с помощью союзов *и, а, если... то, либо, или, тогда и только тогда, когда* и др. Назовем такие и аналогичные им союзы **логическими связками.** Новые предложения появляются также с употреблением частицы *не* или слов *неверно, что.* Эти слова также будем называть логическими связками. Тогда утвердительные предложения, не содержащие логические связки будем называть **элементарными** высказываниями, а содержащие логические связки- **составными.**

Например, предложение «Все программисты имеют высшее или среднее специальное образование» состоит из двух элементарных предложений: «Все программисты имеют высшее специальное образование» и «Все программисты имеют среднее специальное образование». Соединены предложения связкой *или.*

Предложение «Если программист не имеет специального образования, то он не будет конкурентоспособен на рынке труда» состоит из простых предложений, соединенных связками *если... то* и отрицаний *не.*

Поскольку языком алгебры логики служат булевы функции, то естественно смысловым связкам поставлены в соответствие логические операции.

Если простое высказывание является *истинным,* то ему соответствует значение логической переменной 1. Если простое высказывание является *ложным,* то ему соответствует значение логической переменной 0. Если выполняется все (составное) высказывание, то оно называется истинным и ему соответствует 1, если не выполняется, то высказывание считается ложным и ему соответствует 0. Составное (сложное) высказывание можно рассматривать как булеву функцию, где аргументами являются аргументы элементарных высказываний, входящих в сложное, а значением будет значение всего высказывания.

Для того чтобы определить, истинно или ложно некоторое составное высказывание, используют таблицы истинности, в которых латинскими буквами обозначаются сами высказывания, а цифрами 1 и 0 — соответственно «истина» или «ложь». Например, высказывание A=«Город X расположен на берегу Волги» *(A)* может быть истинным (при X= Самара $A = 1$) или ложным (при X= Омск $A = 0$).

Упражнения

1. Определите истинность составного высказывания: $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge (C \vee D)$, состоящего из простых высказываний:

A = {Принтер – устройство вывода информации},

B = {Процессор – устройство хранения информации},

С = {Монитор – устройство вывода информации},

D = {Клавиатура – устройство обработки информации}.

2. Среди следующих высказываний укажите составные, выделите в них простые, обозначьте их каждое из них буквой. Запишите с помощью логических операций каждое составное высказывание.

1. Число 456 трехзначное и четное.
2. Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
3. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.
4. Луна – спутник Земли.
5. На уроке химии ученики выполняли лабораторную работу, и результаты исследований записывали в тетрадь.
6. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 5 или 0
7. Если число оканчивается на 0, то оно делится на 10.
8. Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.
9. Если у меня будет свободное время и не будет дождя, тоя не буду писать сочинения, а пойду на дискотеку.
10. Без Вас хочу сказать Вам много
При Вас я слушать Вас хочу.
11. Если человек с детства и юности своей не давал нервам властвовать над собой, то они не привыкнут раздражаться и будут ему послушны.

3. Постройте отрицания следующих высказываний.

1. На улице сухо.
2. Сегодня выходной день.
3. Ваня не был готов сегодня к урокам.
4. Неверно, что число 3 не является делителем числа 198.
5. Некоторые млекопитающие не живут на суше.
6. Неверно, что число 17 – простое.

3. Из каждых трех выберите пару высказываний, являющихся отрицаниями друг друга.

1. “Луна – спутник Земли”, “Неверно, что Луна спутник Земли”, “Неверно, что Луна не является спутником Земли”;
2. “2007 < 2008”, “2007 > 2008”, “2007 ? 2008”;
3. “Прямая *a* перпендикулярна прямой *c*”; “Прямая *a* не параллельна прямой *c*”; “Прямая *a* не пересекается с прямой *c*”.

4. Найдите значения логических выражений:

1. $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 1)$
2. $((1 \vee 1) \vee 0) \vee 1$
3. $(1 \rightarrow 1) \vee (0 \leftrightarrow 0)$
4. $(0 \wedge 1) \wedge 1$

5. $1 \wedge (1 \wedge 1) \wedge 1$
6. $((0 \vee 1) \wedge (1 \wedge 1)) \wedge (0 \vee 1)$
7. $((1 \wedge 0) \rightarrow (0 \vee 1)) \vee 1)$
8. $((1 \wedge \neg 1) \vee 0) \wedge (0 \vee \neg 1)$
9. $((0 \wedge 0) \vee 0) \leftrightarrow (1 \vee 1)$
10. $\neg 1 \wedge (1 \vee 1) \vee (\neg 0 \wedge 1)$
11. $(\neg 1 \rightarrow 1) \wedge (1 \vee \neg 1) \leftrightarrow (\neg 1 \vee 0)$

5. Даны два высказывания: A = “2 х 2 = 4”, B = “2 х 2 = 5”. Очевидно, что A=1, B=0. Какие из высказываний истинны?

а) $\neg A$

б) $\neg B$

в) A

г) $A \vee B$

д) $A \rightarrow B$

е) $A \leftrightarrow B$

6. Даны простые высказывания: A= {15>13}, B={4=5}, C= {7<4}. Определите истинность составных высказываний:

$(A \vee B) \wedge C \rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

$(A \wedge B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (A \wedge B)$

7. При каких значениях числа X логическое выражение *не ((X>15) или (X<-5))* примет значение:

1. ложь,
2. истинна.

8. Какие из высказываний A, B должны быть истинны и какие ложны, чтобы было ложное высказывание $(A \wedge B) \leftrightarrow 1$?

2.2.2. Формулы алгебры логики

Любые высказывания, полученные из элементарных высказываний, с помощью конечного числа введенных логических операций, называются **формулами алгебры логики.**

Логические операции подчиняются определенным законам. Рассмотрим их для операций дизъюнкции и конъюнкции, учитывая свойство двойственности. Двойственность операций заключается в том, что если в формуле, содержащей только операции дизъюнкции, конъюнкции и инверсии, заменить $\wedge$ и $\vee$ на $\vee$ и $\wedge$ соответственно, а 0 на 1 и 1 на 0, то получаются новые равносильности.

Законы Де Моргана называют переносом через логические связки. Приведем формулы с другими операциями, которые также будем считать основными.

Законы алгебры логики

Дизъюнкция	Законы	Конъюнкция
$a \vee b = b \vee a$	Переместительный закон	$ab = ba$
$a \vee (b \vee c) =$ $= (a \vee b) \vee c$	Сочетательный закон	$a(bc) = (ab)c$
$a(b \vee c) = ab \vee ac$	Распределительный закон	$a \vee (bc) =$ $= (a \vee b)(a \vee c)$
$a \vee a = a$	Правила идемпотентности	$a \cdot a = a$
$\overline{a \vee b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$	Законы Де Моргана	$\overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b}$
$a \vee 0 = a$	Правила операций с константами	$a \cdot 0 = 0$
$a \vee 1 = 1$		$a \cdot 1 = a$
$a \vee ab = a$	Законы поглощения	$a(a \vee b) = a$
$a \vee (\overline{a}b) = a \vee b$		$a(\overline{a} \vee b) = ab$
$a \vee \overline{a} = 1$	Законы инверсии (отрицания)	$a \cdot \overline{a} = 0$
$ab \vee a\overline{b} = a$	Законы склеивания	$(a \vee b) \cdot (a \vee \overline{b}) = a$

$\overline{\overline{a}} = a$ -снятие двойного отрицания

$a \to b = \overline{a} \vee b$ - снятие импликации

$a \leftrightarrow b = a \wedge b \vee \overline{a} \wedge \overline{b}$

Все эти формулы получаются простой проверкой по таблице истинности с учетом истинности каждой операции, правильного раскрытия скобок и выполнения операций по приоритету.

Формула называется ***тождественно истинной*** или ***тавтологией***, если она реализует функцию «тождественная единица».

Формулы логики, принимающие всегда ложное значение, называются ***тождественно ложными*** (или *противоречиями*).

Например, формула $(a \wedge \overline{a})$ - противоречие.

Для упрощения формул, содержащих скобки и различные логические операции, будем учитывать ряд правил. Так, при опускании скобок:

• самой первой выполняется конъюнкция между элементарными высказываниями и их отрицаниями;

• дизъюнкция выполняется раньше импликации и эквиваленции;

• знак отрицания над формулой дает возможность опустить скобки, в которых эта формула заключена.

С помощью основных таблиц истинности можно составлять таблицы истинности сложных формул.

Пример 1.

$\overline{(x_1 \vee x_2)} \cdot x_1$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$\overline{(x_1 \vee x_2)} \cdot x_1$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
		1	0	0

Пример 2

$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2)$

x_1	x_2	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

Пример 3

$\overline{x_1 \cdot x_2} \vee \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2}$

x_1	x_2	$\overline{x_1 \cdot x_2}$	$\overline{\bar{x}_1 \cdot x_2}$	$\overline{x_1 \cdot x_2} \vee \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

Пример 4

$\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \cdot \bar{x}_2$

x_1	x_2	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$\overline{\bar{x}_1 \vee x_2}$	$\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \cdot \bar{x}_2$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Пример 5

$x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2$

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot \overline{x}_2$	$x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Две формулы алгебры логики называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений элементарных высказываний, входящих в них.

Справедливость логических равенств доказывается путем вычисления значения левой и правой частей выражения для всех возможных значений логических переменных. Если значения обеих частей выражения совпадают, то равенство считается доказанным.

Пример 6

Проверить справедливость равенства с помощью таблиц истинности

$a(a \vee b) = a$

a	b	$a \vee b$	$a \cdot (a \vee b)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Пользуясь законами и свойствами логических функций, их можно преобразовывать

Пример 7

$(\overline{x_1 + x_2}) \cdot x_1 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_1 = \overline{x}_1 \cdot x_1 \cdot \overline{x}_2 = 0 \cdot \overline{x}_2 = 0$

Пример 8

$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot (x_1 \cdot \overline{x}_2) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_1 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_2 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$

Упражнения

1. Проверьте справедливость равенства с помощью таблиц истинности

$(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$

2. Постройте таблицы истинности формул

а) $(\overline{\overline{x}_1 \vee x_2}) \wedge \overline{x}_2$

б) $x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x}_2$

3. Пользуясь законами и свойствами логических функций, преобразуйте формулу

$$\overline{x_1 \wedge x_2} \vee \overline{\overline{x}_1 \wedge x_2}$$

Тема 2.3. Минимизация булевых функций

2.3.1.Дизъюнктивные нормальные формы, конъюнктивные нормальные формы

Наиболее рационально точки зрения интуитивного понимания представление булевых функций с помощью операций: отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию Подобное представление полезно, например, в электротехнике, где микросхема реализует одну из этих простейших операций. Далее мы докажем, что любую булеву функцию можно выразить через отрицание (НЕ), конъюнкцию (И) и дизъюнкцию (ИЛИ), а пока будем считать, что функция уже эквивалентна композиции этих трех функций.

Рассмотрим булевы функции, представленные в виде суперпозиции элементарных функций И, ИЛИ, НЕ. Используя законы алгебры логики, можно заменить громоздкие булевы функции им равносильными, но более простыми. Такой процесс называется **минимизацией** булевых функций. Его проводят для упрощения сложных логических выражений в программах, а также для того, чтобы построенные на их основе функциональные схемы не содержали лишних элементов.

Минимизировать булевы функции надо, приводя их к так называемой *нормальной форме.*

Существуют две разновидности нормальных форм — дизъюнктивные (ДНФ) и конъюнктивные (КНФ). Введем определения.

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) называется выражение, состоящее из конечного числа переменных и их отрицаний, взятых в этом выражении не более одного раза и разделенных операциями конъюнкции (дизъюнкции).

Дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой называется дизъюнкция (конъюнкция) конечного числа элементарных конъюнкций (дизъюнкций). Сокращенно они обозначаются ДНФ и КНФ соответственно.

Нормальная форма называется совершенной, если в каждой ее элементарной дизъюнкции (конъюнкции) представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицанием).

Любая булева функция и любая формула алгебры логики могут быть представлены множеством различных дизъюнктивных форм, равносильных между собой. Например:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3 = x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \text{ и т.д.}$$

2.3.2. Совершенные формы

Из всех различных ДНФ функции

$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_1}\overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} = x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$

особо выделяется последнее логическое выражение, которое является совершенной ДНФ, сокращенно СДНФ.

На СДНФ накладываются следующие требования:

- формула не является тождественно-ложной;
- формула приведена к одному из видов ДНФ;
- из формулы удалены элементарные конъюнкции, включающие одновременно переменную и ее отрицание, согласно закону инверсии;
- из формулы удалены одинаковые элементарные конъюнкции, кроме одной, согласно правилу идемпотентности;
- каждая элементарная конъюнкция в ДНФ включает все логические переменные, входящие в эту формулу.

Если в логической функции не выполняется последнее требование, то в неполную элементарную конъюнкцию необходимо ввести дополнительный множитель, включающий дизъюнкцию отсутствующей переменной и ее отрицание. Это всегда можно сделать, так как согласно закону инверсии $a \vee \overline{a} = 1$.

Рассмотрим ДНФ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$. Для того чтобы привести ее к СДНФ, необходимо в первой элементарной конъюнкции иметь переменные x_2 и x_3или их отрицания. Для этого дважды умножим x_1 на 1, с тем чтобы затем эти единицы заменить дизъюнкциями $x_2 \vee \overline{x_2}$ и $x_3 \vee \overline{x_3}$соответственно:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} = x_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} = x_1(x_2 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} = x_1 x_2 x_3 \vee$$
$$\vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

Полученная ДНФ является совершенной, т. к. соответствует всем перечисленным требованиям.

Аналогично любую формулу, имеющую вид ДНФ, можно привести к совершенной конъюнктивной нормальной форме (КНФ), для которой выполняются требования:

- формула не является тождественно-ложной;
- формула приведена к одному из видов КНФ;
- из формулы удалены одинаковые элементарные дизъюнкции,
кроме одной;
- каждая элементарная дизъюнкция в КНФ включает все
логические переменные, входящие в эту формулу.

Если логическая функция имеет вид КНФ, то привести ее к виду совершенной КНФ (сокращенно СКНФ) можно, дополнив каждую элементарную дизъюнкцию логическим нулем, который в следующем шаге заменяется на конъюнкцию недостающей переменной и ее отрицание.

Для сравнения приведем примеры нормальных форм:

Формы	Конъюнктивные	Дизъюнктивные
Нормальные	КНФ $(x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3)$	ДНФ $x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3$
Совершенные нормальные	СКНФ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$	СДНФ $x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \overline{x_2 x_3}$

В содержательных задачах, где необходимо рассмотреть все возможные варианты информации о каждой из переменных, входящих в данную булеву функцию. Любая булева функция, не являющаяся тождественным нулем или единицей, имеет только одну СДНФ с точностью до расположения переменных.

Мы рассмотрели примеры, когда булева функция была уже выражена через логические операции. Теперь посмотрим, как составить совершенные нормальные формы тогда, когда известна лишь таблица значений.

Для образования СДНФ (СКНФ) необходимо:

1) по каждому набору логических переменных, при котором логическая функция принимает значение 1(0) составить элементарные конъюнкции (дизъюнкции);

2) в элементарные конъюнкции (дизъюнкции) записать без инверсии переменные заданные 1 (0) в соответствующем наборе и с инверсией- переменные, заданные 0(1).;

3) соединить элементарные конъюнкции (дизъюнкции) знаком дизъюнкции (конъюнкции).

Пример. Составить СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей:

x_1	x_2	x_3	$F(x_1,x_2,x_3)$	Элементарные конъюнкции	Элементарные дизъюнкции
0	0	0	1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	
0	0	1	0		$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
0	1	0	0		$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
1	0	0	1	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	
1	0	1	1	$x_1 \bar{x}_2 x_3$	
1	1	0	0		$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	0		$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$
1	1	1	1	$x_1 x_2 x_3$	

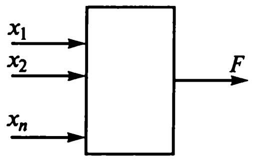
СДНФ: $F(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$

СКНФ: $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

Практическим построением СДНФ показано, что любая булева функция, не являющаяся константой, по таблице истинности разлагается в совершенную нормальную форму, т.е. в композицию отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Тема 2.3.3. Логические схемы

Одной из целей булевой алгебры является описание поведения и структуры логических схем. Логическая схема имеет вид «черного ящика», в котором вход — набор булевых переменных, а выход — булева функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Метод «черного ящика» используется в тех случаях, когда предметом изучения является поведение сложных систем, а не их устройство.



Исследователя интересуют лишь входные и выходные сигналы, а не процессы, происходящие внутри самого устройства. Впервые понятие «черный ящик» ввел английский ученый У. Р.Эшби для изучения отношений между экспериментом и окружающей средой, когда предметом исследования служат потоки информации.

Логическая схема

Для того чтобы описать поведение «черного ящика», достаточно выразить выход F в виде функции от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Примерами логических схем служат обыкновенные микросхемы, которые в большом количестве присутствуют в электробытовых приборах и компьютерах. Если элемент имеет входное напряжение в пределах от 0 до 0,4 В, то оно рассматривается как логический 0, если напряжение в пределах от 0,7 до 1,5 В, то оно рассматривается как 1. Примерно такие же характеристики имеет выходное напряжение.

Комбинационная схема — это логическая схема, в которой значения входных переменных в данный момент времени полностью определяются значениями выходных переменных. С развитием вычислительной техники математическая логика оказалась тем инструментом, который дает возможность анализировать электрические цепи при проектировании ЭВМ. Логическая схема устройства основывается на объединении электронных элементов, реализующих конкретные логические операции.

Задача 1. По заданной таблице истинности найти логическую функцию.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1x_2x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Решение. Найдем элементарные конъюнкции, исходя из истинных значений данной функции:

x_1	x_2	x_3	$F(x_1x_2x_3)$	Основные конъюнкции
0	0	0	1	$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$
0	0	1	1	$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$
0	1	0	1	$\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

Тогда $F(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3$. Минимизируем полученную формулу:

$$F(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3=(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)\vee(x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3)=$$
$$=\bar{x}_1\bar{x}_3(\bar{x}_2\vee x_2)\vee\bar{x}_2x_3(x_1\vee\bar{x}_1)=\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2x_3$$

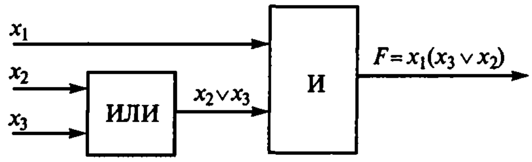
Задача 2. По заданной таблице истинности составить логическую схему.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1x_2x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

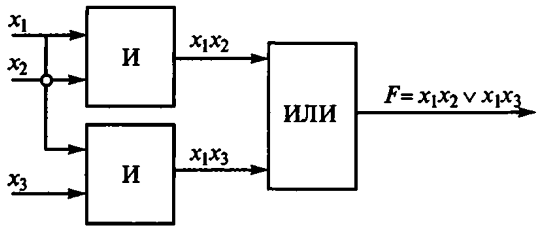
Решение. Найдем элементарные конъюнкции и, составим булеву функцию: $F(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3$. Минимизируем результат:

$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3=x_1x_3(\bar{x}_2\vee x_2)\vee x_1x_2\bar{x}_3=x_1x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3=x_1(x_3\vee x_2\bar{x}_3)=$$
$$=x_1(x_3\vee x_2)=x_1x_3\vee x_1x_2$$

Построим два варианта логических схем.



а



б

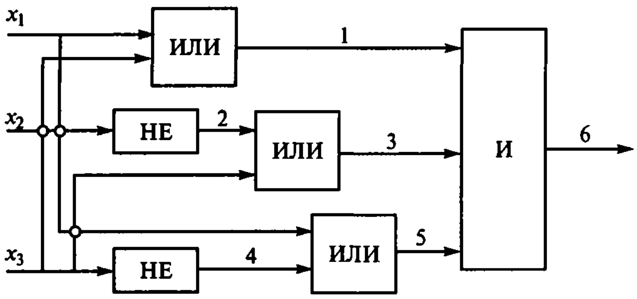
Логическая схема булевой функции

Далее будем следовать электротехническому правилу: если в узле на рисунке сходятся три линии, то соединение есть, а если четыре — то нет, т.е. перекрещивающиеся линии не связаны, поэтому выколотую точку рисовать не будем.

Логическая схема на рис. *а* состоит из двух элементов, а на рис. *б* — из трех. Сравнивая логические схемы, построенные для одной и той же булевой функции, представленной в различных формах, видим, что более рациональна запись через КНФ.

Задача 3. По заданной логической схеме составить булеву функцию и минимизировать ее до ДНФ.

Решение. Поставим в соответствие каждому входу булеву переменную x_1, x_2, x_3



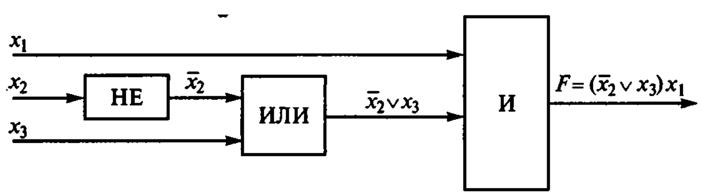
На выходах значения компонентов, составляющих булеву функцию, имеют вид:

1) $x_1 \vee x_3$; 2) $\bar{x}_2$; 3) $\bar{x}_2 \vee x_3$; 4) $\bar{x}_3$; 5) $x_1 \vee \bar{x}_3$; 6) $(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)$

Минимизируем результат, доведя его до ДНФ

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3) = x_1(\bar{x}_2 \vee x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3$$

Из полученного результата видим, что эта же булева функция может быть задана другой схемой, содержащей всего три элемента.



Потребность в минимизации булевых функций возникает в целях экономии при синтезе логических схем.

Минимизировать нормальные формы можно различными способами: методом каскадов, с помощью карт Карно и другими.

Минимальная или **сокращенная** нормальная форма получается из совершенной конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной формы удалением некоторых элементарных дизъюнкций (конъюнкций).

Тупиковой нормальной формой называется КНФ (ДНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной дизъюнкции (конъюнкции) так, чтобы сохранить неизменной заданную булеву функцию.

Для представления булевой функции в таком виде необходимо сначала представить ее в совершенном виде и только затем минимизировать до минимальной из всех тупиковых форм.

Карты Карно являются одним из наиболее удобных способов минимизации. Они впервые появились в одной из статей Мориса Карно в 1953 г. Это специальные таблицы, дающие возможность упростить процесс поиска минимальной формы булева выражения с помощью графического представления для $n < 6$. Они имеют вид прямоугольника, разделенного на 2^n клеток, в каждой из которых — двоичный n-мерный набор значений функции F из таблицы истинности. Клетки заполняются единицами, если в СДНФ присутствуют соответствующие элементарные конъюнкции, остальные остаются пустыми.

При заполнении карт Карно необходимо обратить внимание на порядок заполнения строк и столбцов значениями переменных. Последовательность значений переменных должна сохраняться неизменной. При таком заполнении каждые две соседние клетки отличаются лишь значением одной переменной. Нарушение порядка заполнения строк или столбцов не запрещается, но может не дать ожидаемого результата.

Рассмотрим примеры минимизации булевых функций с помощью карт Карно.

Пусть $F(A,B,C) = \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}BC \vee AB\bar{C} \vee ABC$

Нанесем единицы на карту и обведем их сначала попарно двумя контурами.

	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	AB	$A\bar{B}$
C		1	1	
$\bar{C}$		1	1	

Такое действие соответствует заключению в скобки слагаемых $(\bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}BC)$ и $(AB\bar{C} \vee ABC)$. Вынося за скобки одинаковые конъюнкции согласно распределительному закону, в скобках получаем дизъюнкцию противоположных значений одной из переменных. В данном примере этому шагу соответствуют конъюнкции $\overline{A}B(\overline{C} \vee C)$ и $AB(\overline{C} \vee C)$. Поэтому объединение двух соседних единиц всегда приводит к закону инверсии, согласно которому дизъюнкция противоположных значений переменной равна 1.

Поэтому при записи ответа после применения карты Карно переменные, заключенные в общий контур, связываются конъюнкцией (как и общий множитель при вынесении за скобки), а такие отдельные конъюнкции, т.е. различные контуры, объединяются между собой дизъюнкцией.

Если записать полученный результат, то, очевидно, к нему вновь можно применить то же правило: $F(A,B,C) = \overline{A}B \vee AB = B$.

Однако в данном примере удобнее рассмотреть целиком весь квадрат из четырех единиц и сравнить переменные, записанные на горизонтальных и вертикальных клетках. Очевидно, общие множители сохранятся после упрощения (ведь их можно было вынести за скобки), а инвертируемые уйдут согласно закону инверсии. Поэтому целесообразнее опустить инвертируемые пары $\overline{A} \vee A$ и $\overline{C} \vee C$, а в ответе сохранить общую для всех клеток переменную *B*.

Синтактический способ минимизации дает тот же результат.

Рассмотрим примеры минимизации булевой функции, содержащей четыре переменные: $F(A,B,C,D) = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}B\overline{C}D \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \vee \overline{A}BCD \vee A\overline{B}\,\overline{C}D$

Занесем единицы в соответствующие клетки карты Карно.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$		1	1	
$\overline{A}B$		1	1	
AB				
$A\overline{B}$	1	1		

Рассмотрим переменные, заключенные контуром в_квадрат. Среди них есть повторяющиеся в соседних клетках (это $\overline{A}$ *и* D). Повторяющиеся переменные как общий множитель мы сохраним, а инвертируемые — опустим. Из контура, содержащего две единицы, вынесем переменные A *и* $\overline{B}$ расположенные на одной строке, а также одинаковую для первых двух столбцов переменную $\overline{C}$, при этом опустим инвертируемую пару D *и* $\overline{D}$. После этих преобразований булева функция примет вид $F(A,B,C,D) = \overline{A}D \vee A\overline{B}\,\overline{C}$

Проверка:

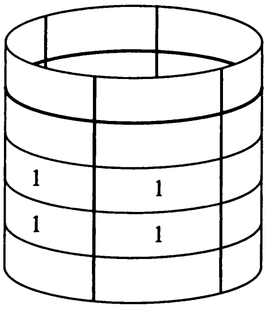
$$F(A,B,C,D) = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}B\overline{C}D \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \vee \overline{A}BCD \vee A\overline{B}\,\overline{C}D =$$
$$= A\overline{B}\,\overline{C}(\overline{D} \vee D) \vee \overline{A}CD(\overline{B} \vee B) \vee \overline{A}\,\overline{C}D(B \vee \overline{B}) = A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}D(\overline{C} \vee C) = A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}D$$

Т.е. результаты минимизации совпали.

Пусть $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4$. Как обычно, занесем единицы в таблицу:

	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\bar{x}_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2$				
$\bar{x}_1x_2$	1			1
x_1x_2	1			1
$x_1\bar{x}_2$				

Но чередование переменных в строке и столбце ничем не ограничено. Такой порядок был введен для удобства последующего упрощения. Поэтому можно сделать так, чтобы все единицы в данном случае оказались рядом. Для этого достаточно свернуть карту в вертикальный цилиндр, в котором левый край совмещается с правым. При их совмещении единицы первого и последнего столбцов окажутся соседними и для них можно будет применить алгоритм склеивания.



Таким образом, и без мысленного сворачивания карты можно *циклически переставлять* аргументы в строках и столбцах. Из всей четверки единиц по вертикали сохранится общая переменная второй и третьей строк x_2, а по горизонтали — общая переменная первого и последнего столбцов $\bar{x}_4$: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\bar{x}_4$. Такие нестандартные приемы минимизации булевых выражений упрощают саму процедуру и экономят время

Пусть $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 = \bar{x}_2\bar{x}_4$. Нанесем единицы на карту:

	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\bar{x}_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	1			1
$\bar{x}_1x_2$				
$x_1\bar{x}_2$				
x_1x_2	1			1

Подобную карту нужно свернуть в шар и одновременно склеить четыре единицы, расположенные в углах. Для полученного квадрата вновь применим тот же алгоритм, сохранив переменные, одинаковые для первой и последней строк ($\bar{x}_2$), а также первого и последнего столбцов ($\bar{x}_4$), объединив их в конъюнкцию.

Рассмотрим еще несколько примеров на упрощение булевых функций с помощью карт Карно.

Пусть $F(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$

Нанесем на карту Карно единицы. Объединим единицы в контуры по два элемента.

	$\bar{x}_2$	x_2
$\bar{x}_1$		1
x_1	1	1

Так как получилось два контура, один из которых дает x_1 а второй x_2, то упрощенный вариант булевой функции содержит дизъюнкцию двух членов: x_1 и x_2. Попадание единицы в два и более контуров соответствует закону идемпотентности $x = x \vee x$, поэтому каждое слагаемое (элементарная конъюнкция) может быть представлено столько раз, сколько нужно для упрощения. При этом они группируются с другими слагаемыми, с которыми попали в один контур, независимо. Получили $F(x_1 x_2) = x_1 \vee x_2$.

Пусть $F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3$

Составим карту Карно для функции трех переменных. Объединим контурами полученные единицы:

	$\bar{x}_3$	x_3
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	1	1
$\bar{x}_1 x_2$		
$x_1 x_2$	1	
$x_1\bar{x}_2$	1	

Опустим дополняющие друг друга переменные. Запишем упрощенный вариант логической функции $F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3$.

Тема 2.4. Операция двоичного сложения

2.4.1.Свойства операции двоичного сложения

Суммой по модулю два (М2 или строгой дизъюнкцией) двух переменных x_1 и x_2 называется булева функция $x_1 \oplus x_2$ которая равна 1 тогда и только тогда, когда равна 1 *только* одна переменная. Приведем таблицу ее значений:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Приведем свойства, которыми обладает сумма по модулю два.

Она подчиняется законам:

- переместительному $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$;
- сочетательному $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$, поэтому скобки можно не писать;
- распределительному конъюнкции относительно М2 $x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3$

Операции с константами имеют вид:

- $x \oplus x = 0$;
- $x \oplus 0 = x$;
- $x \oplus \bar{x} = 1$;
- $x \oplus 1 = \bar{x}$

Возможно разложение в СДНФ:

$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$

Для суммы по модулю два справедлива формула отрицания

$\overline{x_1 \oplus x_2} = \bar{x}_1 \oplus x_2 = x_1 \oplus \bar{x}_2$

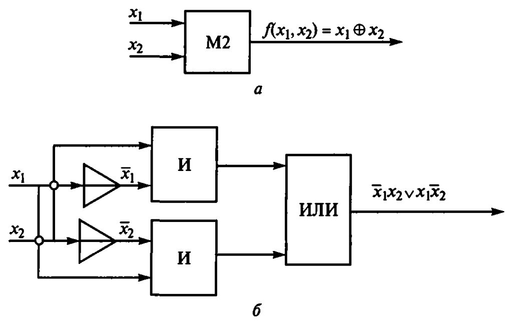
Проверим справедливость последней формулы с помощью таблицы истинности:

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus \bar{x}_2$	$x_1 \oplus x_2$	$\overline{x_1 \oplus x_2}$
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1

Связь между дизъюнкцией и суммой по модулю два: $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$

Конъюнкцию x_1x_2 можно выразить через сумму по модулю два и дизъюнкцию по формуле: $x_1x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \vee x_2)$

Отрицание суммы по модулю два представим в виде: $\overline{x_1 \oplus x_2} = \bar{x}_1 \oplus x_2 = \bar{\bar{x}}_1 x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$



Элемент и схема для операции М2:

***а* — логический элемент; *б* — логическая схема**

Сравнивая операции двоичного сложения и суммы по модулю два, можно увидеть аналогию. Операция двоичного сложения в пределах последнего двоичного разряда имеет ту же последовательность символов, что и сумма по модулю два. Действительно,

$0 + 0 = 0,$
$0 + 1 = 1,$
$1 + 0 = 1,$
$1 + 1 = (1)\ 0.$

Эти наблюдения дают основания для выдвижения еще одной гипотезы: возможно применение суммы по модулю два в двоичном сумматоре для системы контроля и исправления ошибок. Действительно, если из-за неисправности в схеме один из аргументов функции М2 исказится, то одновременно и значение функции изменится на противоположное, что сразу можно будет обнаружить на выходе.

Поэтому операция сложения по модулю два имеет особое значение для организации работы компьютера: в схемах контроля и исправления ошибок используется это ее специфическое свойство.

2.4.2.Полином Жегалкина

В СДНФ булевой функции только одна из элементарных конъюнкций равна 1. Это дает основание представить любую булеву функцию с помощью операции сложения по модулю два. Заменив в СДНФ $\bar{x}_i$ на $1 \oplus \bar{x}_i$ и используя распределительный закон для конъюнкции относительно сложения по модулю два, имеем $(1 \oplus x_i)(1 \oplus x_j) = 1 \oplus x_i \oplus x_j \oplus x_i x_j$. Тогда, учитывая, что $f \oplus f = 0$, а $f \oplus 0 = f$, булеву функцию/можно представить в виде

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f_0 \oplus f_1 x_1 \oplus f_2 x_2 \oplus \ldots \oplus f_n x_n \oplus f_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus f_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

причем $f_i \in \{0, 1\}$.

Такое представление булевой функции называется **каноническим полиномом Жегалкина.**

Например, представим в виде полинома Жегалкина булеву функцию, заданную таблично:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Найдем ее СДНФ и преобразуем:

$$f(x_1x_2x_3) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = (1 \oplus x_1)x_2(1 \oplus x_3) \oplus$$
$$\oplus\, x_1(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus x_1(1 \oplus x_2)x_3 \oplus x_1x_2x_3 = (x_2 \oplus x_1x_2)(1 \oplus x_3) \oplus$$
$$\oplus\, (x_1 \oplus x_1x_2)(1 \oplus x_3) \oplus (x_1 \oplus x_1x_2)x_3 \oplus x_1x_2x_3 = x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus$$
$$\oplus\, x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 =$$
$$= 0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 0 \cdot x_1x_3 \oplus 0 \cdot x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3.$$

Как видим, $f_0 = f_{13} = f_{12} = 0,$ остальные полиномиальные коэффициенты равны 1. Нули можно не выписывать, а отсутствие слагаемого (конъюнкции) вида $x_1, x_2...x_k$ будет означать, что $f_i = 0$. Таким образом, предпоследнее выражение тоже является полиномом Жегалкина.

Итак, с помощью конъюнкции и М2 любую логическую функцию можно *единственным* образом представить в виде многочлена. Иногда можно представить функцию в виде полинома Жегалкина более простым способом. Например, функцию $x\bar{y}$ будем искать в виде многочлена с неопределенными коэффициентами $x\bar{y} = a \oplus bx \oplus cy \oplus dxy$.

При $x = 0, y = 0$ будет $0 = a;$ при $x = 0, y = 1$ имеем $0 = 0 \oplus c$, откуда $c = 0$; при $x = 1, y = 0$ имеем $1 = b \oplus 0$ т.е. $b = 1$. Наконец, при $x = y = 1$ получим $0 = 1 \oplus d$ и $d = 1$. В итоге $x\bar{y} = x \oplus xy$.

Тема 2.5. Полнота множества функций

2.5.1.Свойства бинарных отношений

Соответствие между равными множествами $A = B$ называется **отношением** на данном множестве *(A)*. Отношения в некоторых числовых множествах могут выражаться терминами: «быть равным», «быть больше», «быть не меньше», «быть делителем» и т.д.

Отношения во множестве линий на плоскости могут выражаться терминами: «быть параллельными», «пересекаться», «касаться» и т.д.

Назовем ***n*-местным отношением** R на непустом множестве M подмножество $R \subset M^n$. При $n = 2$ отношение R называется **бинарным** . То есть **бинарным** отношением между элементами множеств A и B называют любое подмножество R множества $A \times B$ и записывают $R \subset A \times B$. Для отношения R **обратным** является отношение $R^{-1} \subset A \times B$.

Бинарные отношения принято записывать в виде *aRb,* где $a, b \subset M$. Запись читается как *«a* и *b* находятся в отношении *R»*. Например, параллельные прямые, $a < b$ (действительные числа), $a = log_c\, b$ и т.д.

Рассмотрим примеры бинарных отношений:

$x < y,\ y = a^x,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \mathrm{tg}\, x,\ y = \mathrm{ctg}\, x,\ y = \log_2 x,\ y = x^n$ и др.

Графики прямых и обратных бинарных отношений, определенных на множестве действительных чисел, симметричны относительно биссектрисы I и III квадрантов. Это свойство обратных бинарных отношений используют при построении графиков обратных функций $y = log_2x$ и $y = 2^x$; $y = sinx$ и $y = arcsinx$, где $0 < x < \pi/2$.

Построение однозначной обратной функции возможно лишь для монотонных функций.

Свойства бинарных отношений. Приведем характерные свойства бинарных отношений, причем каждое отношение может обладать или не обладать этими свойствами.

1. ***Рефлективность:*** *aRa.* Например, «быть не больше» на R.
2. ***Антирефлективность.*** Имеет место, когда отношение не обладает свойством 1 для любых *a,* например «быть больше», «быть младше» и др.
3. ***Симметричность*** любых двух элементов. Отношение *R* на множестве *M* называется **симметричным,** если для любых $a, b \in M$ одновременно справедливо *aRb* и *bRa* (т.е. $R = R^{-1}$). Симметрична параллельность прямых, так как если *a*||*b,* то *b*||*a.* Симметрично отношение «быть равным» на любом множестве или «быть взаимно-простым» на N.
4. ***Антисимметричность.*** Если для несовпадающих элементов $a \neq b$ верно отношение *aRb,* то ложно *bRa.* Антисимметричными являются отношения «быть больше», «не меньше» на R, «быть делителем» на N и др.
5. ***Транзитивность.*** Если *aRb* и *bRc,* то *aRc* для любых $a, b, c \in M$. Транзитивны отношения «быть больше», «быть параллельным», «быть равным» и др.
6. ***Антитранзитивность.*** Имеет место, когда отношение не обладает свойством 5. Например, «быть перпендикулярным» на множестве прямых плоскости ($a \perp b$, $b \perp c$, но неверно $a \perp c$).
7. ***Асимметричность.*** Ни для одной пары *a* и *b* не выполняется одновременно *aRb* и *bRa.*
8. ***Связность.*** Для любых *a и b* если $a \neq b$, то *aRb* или *bRa.*

Некоторые свойства конкретных бинарных отношений приведены в таблице:

Свойства бинарных отношений

Множества	Отношение	Рефлективность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность	Антитранзитивность
Любые	$a = b$	+	+	−	−	+	−
Любое	$a \neq b$	−	+	−	−	−	+
$\mathbb{N}$	$a \vdots b$, $a = bq$	+	−	−	+	+	−
$\mathbb{R}$	$a > b$	−	−	+	−	+	+
$\mathbb{R}$	$a \geq b$	+	−	−	+	+	+
$\mathbb{R}$	$a < b$	−	−	+	−	+	+
$\mathbb{R}$	$a \leq b$	+	−	−	+	+	+
Прямые плоскости	$a \parallel b$	+	+	−	−	+	−
Прямые плоскости	$a \perp b$	−	+	−	−	−	−
Векторы $\forall a$, $\forall b$	Коллинеарность $a = \lambda b$	+	+	−	−	+	−
Окружности	Касание	+	+	−	−	−	−
Окружности	Концентричность	+	+	−	−	+	−
$\mathbb{N}$	Взаимная простота	−	+	−	−	−	−

Рассмотрим основные виды бинарных отношений. **Отношение эквивалентности.** Бинарное отношение *R* называется отношением **эквивалентности,** если оно одновременно обладает

тремя свойствами: рефлективностью, симметричностью и транзитивностью, т.е. если для любых *x, y, z* выполняется:

- *xRx* (рефлективность);
- если *xRy,* то *y Rx* (симметричность);
- если *xRy,* а *yRz,* то *xRz* (транзитивность).

Обозначение эквивалентных отношений: *a Q b* или *a ~ b,* что означает *«a* эквивалентно *b* в отношении *Q»,* например, «быть равным на множестве чисел», быть подобным на множестве геометрических фигур.

Непересекающиеся подмножества, на которые разбивается множество *M* отношением эквивалентности, называются **классами эквивалентности.** Множество классов эквивалентности множества *A* относительно *Q* называется **фактор-множеством** и обозначается ***A\ Q.***

Например, множество всех рациональных чисел *Q* можно разбить на классы эквивалентности, для которых *a/b* — рациональная дробь, где *a ϵ* Z; *b ϵ N*. Любая дробь *c/b* будет отнесена к тому же классу тогда и только тогда, когда *ad = be,* т. е. *a/b* и *c/d* эквивалентны, если *ad = be* (например, -2/4 ~ -3/6). Проверим выполнимость свойств для такого отношения.

Рефлективность. Для любой дроби *a/b* выполняется равенство ***ab = ba,* значит *a/b Q a/b.***

Симметричность. Если *a/b Q c/d,* то *ad = be,* но *be = ad,* значит ***c/d Q a/b.***

Симметричность равенства произведений влечет за собой симметричность отношений между дробями.

Транзитивность. Известно, что *a/b Q c/d, c/d Q m/n.* Докажем, что *a/b Q m/n,* т.е. *an = bm.* Действительно, так как *a/b Q c/d,* то *ad = be,* аналогично *c/d Q m/n,* то *cn = md.* Умножим первое равенство на *n,* а второе на *Ь,* тогда имеем *adn = ben* и *ben = mdb.* По свойству транзитивности *adn = mdb* или *an = mb.* Известно, что такие дроби классифицируются по элементу, порождающему класс эквивалентности, которым в этом примере является несократимая дробь (например, для 2/4 ~ 3/6 ~ 4/8 таковой будет 1/2).

Отношение толерантности. Отношение *A* на множестве *M* называется отношением **толерантности,** если оно рефлективно и симметрично. Очевидно, что отношение эквивалентности есть частный случай толерантности, когда к двум перечисленным свойствам добавляется транзитивность. Например, отношение «быть другом» рефлективно, симметрично, но не транзитивно. Таким образом, толерантность является более слабой мерой сходства, чем эквивалентность, но тем не менее помогает выявлять различия в схожих вещах.

Отношение порядка. Отношение *R* называется **отношением порядка** на множестве М, если оно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности. Для произвольного отношения порядка принято обозначение ‹, означающее **предшествование.**

На множестве *M* задано отношение $\frac{\text{полного}}{\text{частичного}}$ порядка, если сравнимы элементы этого

множества. Множество М, на котором установлено отношение $\frac{\text{частичного}}{\text{полного}}$ порядка, наз $\frac{\text{частично}}{\text{вполне}}$ упорядоченным

Отношение нестрогого порядка должно удовлетворять трем условиям:

- рефлективности, т.е. *xRx;*
- антисимметричности, т.е. если *xRy* и *yBx,* то *x = y;*
- транзитивности, т.е. если *xRy,* а *yRz,* то *xRz.*

2.5.2. Функциональная замкнутость

Обозначим через P_2 множество всех функций алгебры логики. Класс функций $R \subset P_2$ называется **функционально замкнутым,** если любая суперпозиция функций этого класса *R* принадлежит этому же классу.

Это означает, что вместе с каждой функцией $f(x_1, x_2,...x_m) \in R$ классу *R* принадлежит и функция $f(y_1, y_2,...y_m)$, где y_i — необязательно различные функции или аргументы

Рассмотрим наиболее важные функционально замкнутые классы функций алгебры логики.

2.5.3.Важнейшие замкнутые классы

Класс функций, сохраняющих константу 0 (To). Так называют функции, для которых выполняется $f(00...0) = 0$. Итак, $T_0 = \{f|f(00...0) = 0\}$.

Покажем, что $F(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \in T_0$. Действительно, $F(0,0,0) = 0 \cdot \bar{0} \vee 0 \cdot 0 \cdot \bar{0} = 0$.

Для *n* аргументов имеется $2^{2^n - 1}$ функций от *n* аргументов, сохраняющих константу, поскольку на одном из двоичных наборов, а именно на *x* = (0...0), значение *f* фиксировано, и для функции с *n* аргументами возможно подобрать лишь 2^n - 1 произвольных наборов аргументов.

Такой класс функционально замкнут по определению.

Класс функций, сохраняющих константу 1 (T_1). Так называют функции, для которых выполняется f(11... 1) = 1. Итак, T_x = = { $f|f$ (11...1) = 0}.

Покажем, что $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$ сохраняет 1. Это можно проверить подстановкой: $F(1,1,1) = 1 \vee \bar{1} \cdot 1 \vee 1 \cdot 1 \cdot \bar{1} = 1$.

Для K_1 справедливо все то же, что и для K_0

Класс самодвойственных функций (S). Функция $f^*(x_1x_2...x_n)$,удовлетворяющая условию $f^*(x_1x_2...x_n) = \overline{f(\overline{x}_1\overline{x}_2...\overline{x}_n)}$, называется **двойственной** по отношению к функции $f(x_1x_2...x_n)$. Очевидно, что $(f^*)^*$ =1. Таким образом, если $f^* = g$, то $g^* = f$ т.е. множество булевых функций разбивается на пары взаимно-двойственных функций.

Обратим внимание на свойства важнейших функций (0)*=1, $(x)^* = x, (\overline{x})^* = \overline{x}, (xy)^* = x \vee y$. Подобная двойственность лежит в основе построения противоположных высказываний.

Функция $f(x_xx_2...x_n) \in P_2$ называется **самодвойственной,** если $f=f^*$. Например, самодвойственна функция $f(x) = x$.

Множество самодвойственных функций образует функционально замкнутый класс.

Класс линейных функций (L). Функцию алгебры логики вида $f(x_1x_2...x_n)$ называют **линейной,** если ее канонический полином Жегалкина имеет вид многочлена первой степени:

$f(x_1x_2...x_n) = k_0 \oplus k_1x_1 \oplus k_2x_2 \oplus ... \oplus k_nx_n$ аналогичного обычному алгебраическому многочлену первой степени, но с коэффициентами *к,* в виде 0 или 1. Число таких линейных функций от n аргументов равно 2^{n+1} при $n = 2$ их восемь из шестнадцати. Они образуют функционально замкнутый класс.

Класс монотонных функций (М).

На множестве B введем полный порядок: 0‹0, 0‹1, 1‹1 по аналогии с отношением ≤ на множестве целых чисел Z. На множестве B^n введем *частичный* порядок, означающий, что неравенство $\alpha = (\alpha_1\, \alpha_2 ...\, \alpha_n) ‹ (\beta_1\, \beta_2 ...\, \beta_n) = \beta$ выполняется тогда и только тогда, когда. Например, 001100 -< 001110.

Два элемента аир называются **сравнимыми** между собой, если *а ‹ р* или *р ‹ а.*

Функция $f\{x_xx_2...x_n)$ называется **монотонной,** если для любых двух элементов а, р є B^n, сравнимых между собой, из $\alpha=(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)‹(\beta_1\beta_2...\beta_n)=\beta$ следует, что $f(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)‹f(\beta_1\beta_2...\beta_n)$. Монотонными будут x_1x_2 и $x_1 \vee x_2$ а x не является монотонной.

Каждый из пяти рассмотренных классов функций обладает очень важным свойством: ***любая из функций алгебры логики, полученная с помощью операций суперпозиции и подстановки из функций одного класса, обязательно будет принадлежать тому же классу булевых функций.***

Систему S функций $f_1, f_2, ..., f_m$ алгебры логики называют **функционально полной**, если любую функцию алгебры логики можно записать с помощью суперпозиции некоторого набора булевых функций $f_1, f_2, ..., f_m$

Очевидно, что если S — функционально полная система, то добавление любого числа булевых функций не изменит статуса системы как функционально полной.

Функционально полная система функций называется **базисом** в пространстве Р2, если удаление хотя бы одной из функций, входящих в нее, превращает эту систему в функционально неполную.

Ранее было доказано, что через функции $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$, $\bar{x}$ можно выразить любые функции алгебры логики, приведя их к виду СКНФ или СДНФ. Следовательно, система этих трех функций полна. Так же мы представляли любую функцию в виде композиции суммы по модулю два, конъюнкции и константы 1 (удаление всех 0 приводило к равной функции). Однако это не единственные возможности для представления функций алгебры логики.

Оказывается, существует довольно много функционально полных систем.

Например, булевы функции можно выразить только через $x_1 \vee x_2$ и $\bar{x}$ и x, воспользовавшись правилом Де Моргана и представив операцию конъюнкции через дизъюнкцию и отрицание.

Критерий функциональной полноты системы функций сформулирован в теореме Поста—Яблонского.

Для того чтобы система S функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ алгебры логики была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала функцию:

не сохраняющую константу 0;

не сохраняющую константу 1;

не являющуюся самодвойственной;

не являющуюся линейной;

не являющуюся монотонной.

3. Основы теории множеств

Тема 3.1. Множества и операции над ними

3.1.1. Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера

Множеством называется совокупность каких-либо объектов, обладающим общим для всех характеристическим свойством. Это определение нельзя считать строгим, так как понятие множества является исходным понятием математики и не может быть определено через другие математические объекты. Один из основателей теории множеств Г. Кантор определял множество так: "Множество есть многое, мыслимое как целое".

Множество – это неопределяемое понятие, которое задается перечислением предметов, входящих (составляющих) в него, либо их свойствами.

Всякое множество состоит из элементов. Объекты, сущности или элементы, составляющие множество, обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, m, x, у …; множество часто обозначают прописными латинскими буквами А, В, М, X, У…. Знак $\in$ обозначает вхождение или принадлежность; $x \in E$ читается: «элемент *x* принадлежит множеству *E»,* или короче: *«x*—элемент множества *E».* Следует различать «общий элемент» *x* множества *E,* т. е. произвольный элемент, характеризующийся единственным свойством «принадлежать множеству», и конкретные элементы *a, b, c,...,* каждый из которых отличен от остальных. Если *x* не принадлежит *E,* будем писать $x \notin E$, что читается «*x* не является элементом множества *E»* или *«x* не принадлежит множеству *E».*

Если каждый элемент множества *A* является элементом множества *B,* говорят, что множество *A* является подмножеством множества *B*, и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отметим, что по определению само множество *A* является своим подмножеством, т.е. $A \subseteq A$.

Множество называется конечным, если оно одержит конечное число элементов. Все остальные множества называются бесконечными.

Также необходимо выделить пустые множества. Множества, не содержащие элементы, называются пустыми. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества, $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Универсальным называют множество U, состоящее из всех

возможных элементов, обладающих данным признаком. Например, множество планет Солнечной системы U = {Земля, Марс, Венера, Юпитер, Сатурн, Уран, Плутон, Меркурий, Нептун}. Заметим, что понятие универсального множества четко не определено, т.е. некорректно.оно тоже будет универсальным. Например, долго считалось, что множество действительных чисел R универсально (т. е. описывает всю математику), пока не открыли поле комплексных чисел C и надкомплексные числа и не поняли, что не существует универсального числового множества.

Существует два способа задания множества:

1) перечисление элементов (только для конечных множеств):

$M = \{m_1, m_2, m_3, ..., m_n \}$

2) указание характеристического свойства:

$M = \{x \ / \ P(x)\}$ - Множество М состоит из таких элементов х, обладающих свойством Р.

Пример:

1) $M = \{1,2,3,4,5\}$ - перечисление;

2) $M = \{x \ / \ x \in N, x \leq 6\}$

Мощностью множества М называется число элементов в него входящих.

$M_2 = \{2,5,6\}$, $|H_2| = 3$, где M_2 – множество, H_2 – мощность множества;

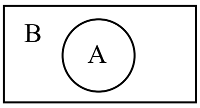
Рассмотрим операции над множествами:

1) операция включения ($\subseteq$):

Множество А включается в множество В или множество А является подмножеством множества В (А$\subseteq$ В), если любой элемент множества А содержится в множестве В.

$(A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \, u \, a \in B)$

Используется теоретико-множественные диаграммы или диаграммы Эйлера, при решении операции включения:



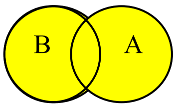
Множество А строго включается в множество В, если во-первых А является подмножеством В и существует элемент b$\in$B, такой что b$\notin$A.

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B, u \exists b \in B | b \notin A$

$A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, где k – количество элементов, т.е. $|A|$=k, тогда количество подмножеств множества А определяется как 2^k.

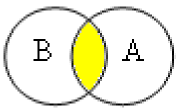
2) операция объединения:

Объединением двух множеств А и В называется новое множество $A \cup B$, которое содержит элементы, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств А или В



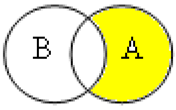
3) операция пересечения:

Пересечением множеств А и В называется новое множество $A \cap B$, которое состоит из элементов, каждый из которых принадлежит и множеству А и множеству В



4) операция разности:

Разностью множеств А и В называется новое множество $A \setminus B$, которое содержит элементы, каждый из которых принадлежит множеству А и не принадлежит множеству В.



5) операция прямого произведения:

Прямым произведением двух множеств А и В, называется новое множество $A \times B$, такое которое состоит из упорядоченных двоек чисел (a, b), причем таких, что первый элемент из этой двойки $a \in A$, второе $b \in B$.

Два множества А и В, называется равными, если множество А является подмножеством множества В, а В является подмножеством множества А.

$A \subseteq B, B \subseteq A$.

Операции над множествами обладают некоторыми свойствами. Эти свойства выражаются совокупностью тождеств, справедливых независимо от конкретного содержания входящих в них множеств.

1. транзитивность операции включения:

$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

т.е. если множество А является подмножеством В, а множество В является подмножеством множества С, то множество А является подмножеством множества С.

2. дистрибутивность операции пересечения относительно объединения:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

т.е. если множество А объединить с множеством В, а потом пересечь с множеством С, то это тоже самое, что А пересечь с С и В пересечь с С, а потом объединить их.

3. дистрибутивность операции объединения относительно пересечения:

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

т.е. если множество А пересечь с множеством В, а потом объединить с множеством С, то это тоже самое, что А объединить с С и В объединить с С, а потом пересечь их.

4. первый закон двойственности:

$C_m(A \cap B) = C_m A \cup C_m B$

т.е. дополнение множества $A \cap B$, есть не что иное, как объединение дополнения множества А и дополнения множества В.

5. второй закон двойственности:

$C_m(A \cup B) = C_m A \cap C_m B$

т.е. дополнение множества $A \cup B$, есть пересечение их дополнений.

6. ассоциативность операции объединения:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

7. ассоциативность операции пересечения:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

8. свойства операции объединения:

- коммутативность объединения:
  $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup A = A$,
- $A \cup \varnothing = A$,
- $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$.

9. свойства операции пересечения:

- коммутативность пересечения:
  $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap A = A$,
- $A \cap \varnothing = \varnothing$,
- $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$.

10. свойства операции разности:

- $A \setminus A = \varnothing$,
- $A \setminus \varnothing = A$,
- $(A \setminus B) \cap C = (A \setminus C) \cap B$,
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

11. дополнение к дополнению любого множества есть всегда само множество, т.е. $\overline{\overline{A}} = A$

12. $\overline{A} \cup A = M$

13. $A \cap M = A$

Свойства подмножеств:

а) Пустое множество является подмножеством любого множества: $\forall A \quad \varnothing \subseteq A$

б) Всякое множество является своим собственным подмножеством: $\forall A \quad A \subseteq A$

3.1.2. Соответствие между множествами

Пусть даны два множества $A = \{a_1, a_2, ...\}$ *и* $B = \{b_1, b_2, ...\}$. Тогда пары (a_i, b_j) задают **соответствие** между множествами *A и B,* если указано правило *R,* по которому для элемента a_i множества *A* выбирается элемент b_j из множества *B.*

Например, соответствие между элементами множеств $x \in R$ и $y \in R$ задает точечное множество (x_i, y_j) координат точек на плоскости; русско-английский словарь устанавливает соответствие значений и написаний слов русского и английского языков.

Пусть задано соответствие *R* между множествами *A* и *B,* т. е. *R: (a; b), a ϵ A, b ϵ B.*

Для некоторого элемента a множества A поставлен в соответствие некоторый элемент b из множества B, который называется **образом** элемента a и записывается $b = R(a)$. Тогда $a - R^{-1}(b)$ — **прообраз** элемента $b \in B$.

Образ множества A при соответствии R называется **множеством значений** этого соответствия и обозначается $R(A)$, если $R(A)$ состоит из образов всех элементов множества A.

Прообраз множества B при некотором соответствии R называют **областью определения** этого соответствия и обозначают $R^{-1}(B)$.

Так, для соответствия R, заданного точками координатной плоскости, областью определения является множество точек оси абсцисс, а множеством значений — проекции точек на ось ординат.

Для описания соответствий между множествами используют понятие **отображения (функции)** одного множества на другое.

Для задания отображения необходимо указать:

- множество, которое отображается **(область определения** данного отображения, часто обозначается $D(f)$);
- множество, в (на) которое отображается данная область определения **(множество значений** этого отображения, часто обозначается $E(f)$).
- *закон* или соответствие между этими множествами, по которому для элементов первого множества (прообразов, аргументов) выбраны элементы (образы) из второго множества. Приняты записи $A \xrightarrow{f} B$ или $f: A \to B$.

Далее будем иметь дело в основном с **однозначными** отображениями, где каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа.

Способ задания отображений в виде формул называется **аналитическим.** Существуют еще табличный и графический способы.

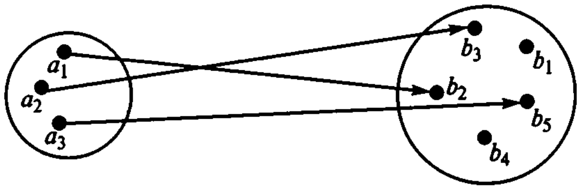
Для задания отображения множеств **табличным** способом принято строить таблицу, в которой первую строку составляют элементы области определения-прообразы, а вторую строку—их образы.

Графическое представление отображения связано со стрелочными схемами (диаграммами или **графами).**

Табличное задание отображения

x	a_1	a_2	...	a_n	...
$\gamma(x)$	$\gamma(a_1)$	$\gamma(a_2)$	...	$\gamma(a_n)$	...

Виды отображений. Различают два основных вида однозначных отображений (функций). По мощности они делятся на ***сюръективные*** и ***инъективные.***



Графическое задание инъективного отображения множества

Соответствие между элементами двух множеств, при котором каждому элементу первого множества соответствует один определённый элемент второго множества, а каждому элементу второго множества — один определённый элемент первого множества, называется **взаимно-однозначным** соответствием между двумя множествами, или **биекцией.**

Если между элементами множеств установлено взаимно-однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковое количество элементов, то говорят, что они **равносильны, равномощны,** или **эквивалентны.**

Рассмотрим примеры отображений.

1. Отображение γ: $a \to a/2$, где $a \in Z$, является биекцией множества Z целых чисел на некоторое множество *B*. Табличное задание такой биекции можно представить в виде таблицы:

x	...	–2	–1	0	1	2	...
$\gamma(x)$	...	–1	–0,5	0	0,5	1	...

Из таблицы видно, что каждому элементу множества Z ставится в соответствие единственный элемент множества *B*. И наоборот, каждому элементу множества *B* можно поставить в соответствие единственный элемент из Z. Обратное отображение можно представить аналитически: γ: $a \to 2a$ и таблично, поменяв местами строки в таблице.

2. Каждому действительному числу поставим в соответствие его квадрат. Отображение $x \to x^2$ не является взаимно-однозначным соответствием, так как для любого образа $y = x^2$ можно найти два прообраза в области определения: $x = +\sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$.

3. Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов

английского и русского языков. Такое соответствие не является однозначным, так как каждому английскому понятию соответствуют различные варианты перевода на русский язык, и наоборот.

Различные виды кодирования (азбука Морзе, представление чисел в различных системах счисления, шифрованные сообщения) являются чаще всего примерами взаимнооднозначного соответствия между множествами.

4. Алгебра предикатов

Тема 4.1. Формальные системы и умозаключения

4.1.1.Умозаключения как форма мышления

Предметы, явления действительности находятся во взаимодействии. Отображением предметов в наших мыслях служат понятия об этих предметах и суждения, которые формируются с помощью понятий. Поэтому суждения о понятиях, как и их образы в реальном мире, тоже находятся во взаимодействии. Взяв за основу истинные исходные суждения (посылки), мы делаем выводы (умозаключения) о тех понятиях, которые фигурировали в суждениях. Связь между ними наглядно можно представить в виде схемы (рис. 5.6).

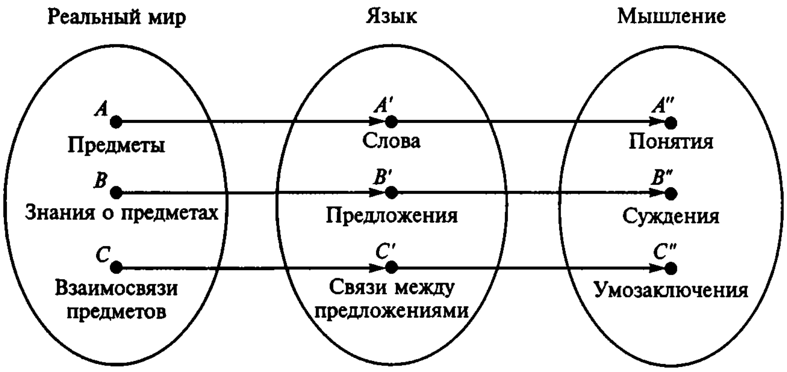


Иллюстрация связи между объектами реального мира, их образами в языке и мышлении

Существует соответствие между объектами действительности, их образами в языке и в мышлении.

Но не всякое сочетание суждений дает умозаключение. Для того чтобы из одного или нескольких исходных суждений (посылок) получились умозаключения, надо знать правила и законы, по которым они образуются.

Приведем три правила образования умозаключений.

Необходимо, чтобы исходные суждения были истинными.

Формирование умозаключений можно проводить только по строго определенным законам, которые необходимо изучить.

Нарушение этих правил ведет к ложным умозаключениям.

Умозаключение — это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений на основании правил выводится новое суждение. В состав умозаключения входят посылки, вывод и заключение.

Посылки — это исходные суждения.

Заключение есть новое суждение, полученное из посылки логическим путем.

Вывод — логический переход от посылки к умозаключению.

Окружающий мир имеет многообразные формы связи между своими объектами, поэтому и в мышлении существуют различные виды умозаключений.

По **направлениям логического следования** умозаключения делятся на: дедуктивные — от общих суждений к частным, индуктивные — от частных суждений к общим, по аналогии — от частных суждений к частным.

По **степени достоверности** умозаключения бывают: достоверными (истинными, демонстративными) и вероятностными (правдоподобными, недемонстративными).

Умозаключения являются логическими Моделями рассуждений. В зависимости от характера умозаключений выводы при истинных посылках и заключениях могут получаться как *достоверные,* которые обязательно будут иметь место, так и *вероятностные,* которые могут произойти лишь с определенной долей вероятности.

Дедуктивные умозаключения также можно классифицировать в зависимости от *количества* истинных посылок:

Непосредственные, $\dfrac{\text{посылка}}{\text{заключение}};$

опосредованные, например

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{большая посылка}\\ \text{меньшая посылка}\end{array}}{\text{заключение}}.$$

Так, дедуктивное опосредованное умозаключение может иметь вид:

Всякий порок заслуживает наказания

$$\dfrac{\text{Курение — порок}}{\text{Курение заслуживает наказания}}.$$

Здесь и далее над чертой будем писать посылки, под чертой — заключение.

Для того чтобы заключения были истинными, необходимо знать способы их получения, т.е. логическую связь между посылками и заключением. Незнание законов логики ведет к ложным заключениям. Например, оцените истинность заключений:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{Людей много}\\ \text{Сократ — человек}\end{array}}{\text{Сократов много}} \text{ или } \dfrac{\begin{array}{c}\text{Платон — человек}\\ \text{Ты — не Платон}\end{array}}{\text{Ты — не человек}}.$$

Здесь нет игры слов, просто неправильно построен вывод. Другой пример неправильного построения вывода:

Все математики изучали математическую логику

$$\dfrac{\text{Все математики имеют высшее образование}}{\begin{array}{c}\text{Все, кто имеет высшее образование, изучали}\\ \text{математическую логику}\end{array}}.$$

Правильное заключение имеет вид: «Некоторые, кто имеет высшее образование, изучали математическую логику».

Правильные дедуктивные умозаключения образуются через отношение логического следования между посылкой и заключением. Истинные посылки, если соблюдены все необходимые правила выводов (т.е. импликация истинна), всегда приводят к истинному заключению.

Поэтому дедуктивные умозаключения — самый строгий вид умозаключений, который при соблюдении всех правил всегда дает **достоверный** результат. Дедуктивные рассуждения являются основным видом рассуждений, применяемых в математике. «Высшим долгом физиков является поиск таких элементарных законов, из которых путем чистой дедукции можно получить картину мира», — писал Альберт Эйнштейн о физике, которая для доказательств законов природы использует математический язык.

4.1.2. Умозаключения из сложных суждений

Один из видов опосредованных дедуктивных умозаключений, в котором из двух категорических суждений выводится третье категорическое суждение, термины которого связаны определенным отношением с термином, общим для обеих посылок, называется **простым категорическим силлогизмом**.

В состав категорического силлогизма входят большая посылка (БП), меньшая посылка (МП), заключение. Общая формула имеет вид:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Все } M \text{ суть } P \text{ (большая посылка)}\\ \text{Все } S \text{ суть } M \text{ (меньшая посылка)}\end{array}}{\text{Все } S \text{ суть } P \text{ (заключение)}},$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Все люди смертны}\\ \text{Врачи — бесспорно, люди}\end{array}}{\text{Все врачи (к сожалению) смертны}},$$

где P —больший термин; S —меньший термин; M — средний термин, посредник.

Классическая логика сконцентрировала свое внимание на тех правилах, по которым делаются достоверные выводы, т.е. на правилах и законах категорических силлогизмов. Она со времен Аристотеля учит строить умозаключения с помощью так называемых фигур категорического силлогизма.

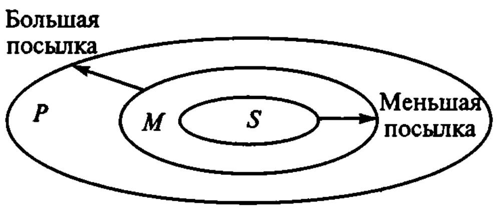


Схема состава категорического силлогизма

Но с развитием математической логики оказалось, что достоверные дедуктивные выводы можно получить не только логическими рассуждениями, но и математическим путем. Приемы математической логики универсальны, более доступны, основаны на строгих законах алгебры высказываний и потому предпочтительнее чисто логических.

Энтимемы (в переводе с греческого — в уме, в мыслях) — сокращенные категорические силлогизмы, в которых пропущены либо одна из посылок, либо заключение. В повседневной речи энтимемы употребляются достаточно часто, так как очевидные, понятные по контексту посылки либо заключения люди интуитивно опускают.

Например, мы говорим: «Все параллелограммы — четырехугольники, значит, и квадрат — четырехугольник», пропуская при этом МП — «квадрат является параллелограммом». В полной форме такой силлогизм имеет вид

БП: Все параллелограммы (M) являются четырехугольниками (P)
МП: Все квадраты (S) являются параллелограммами (M)

Вывод: Все квадраты являются четырехугольниками .

Из любого силлогизма можно получить три вида энтимем. Пусть дан силлогизм

БП: Все, не знающие правил грамматики (M) допускают ошибки (P)
МП: Я (S) не знаю правил грамматики (M)

Вывод: Я допускаю ошибки .

1. Раз я не знаю правил грамматики, то допускаю ошибки». Пропущена большая посылка, так как очевидно, что допускают ошибки те, кто не знает правил грамматики.
2. «Так как все, кто не знает правил грамматики, допускают ошибки, то и я допускаю ошибки». Пропущена меньшая посылка, понятная из контекста: я не знаю правил грамматики
3. «Все, кто не знает правил грамматики, допускают ошибки, а я их не знаю». Пропущен очевидный вывод: значит, я пишу с ошибками.

В зависимости от видов посылок в сложных суждениях из них можно получить различные умозаключения, причем в одних случаях они дают достоверные заключения, а в других — вероятностные.

Разделительные силлогизмы содержат хотя бы в одной из посылок разделительное суждение, выраженное через строгую дизъюнкцию, и дают достоверный вывод.

Условные силлогизмы содержат условные суждения в посылках или заключении (операция следования): $p \rightarrow q$, где p — основание, q — следствие, и дают достоверный вывод.

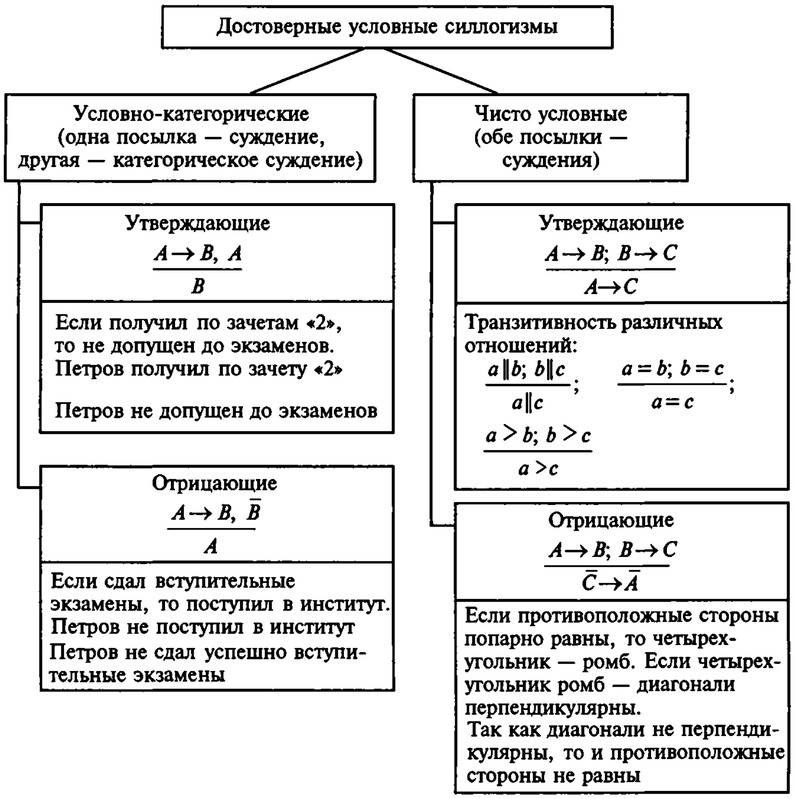
Кроме перечисленных, существуют и другие виды сложных силлогизмов. Для того чтобы проверить, правильно ли сделан вывод в дедуктивных умозаключениях, можно использовать математическую логику.

Схема проверки включает в себя следующие этапы.

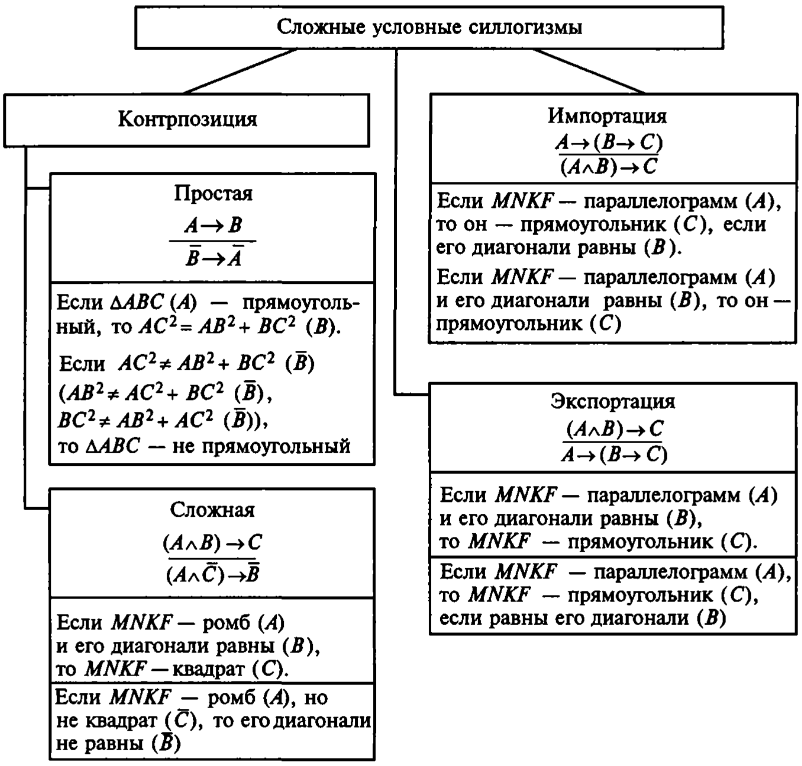
1. Проверка справедливости заключения в результате сравнения его с соответ-

ствующим правилом.

2. Проверка справедливости заключения с помощью составления таблиц истинности на основании того, что между посылками и выводом дедуктивного умозаключения существуют отношения логического следования.



а



б

Условные силлогизмы: *а* — достоверные; *б* — сложные

Заключение не может быть ложным при истинных посылках и правильном ведении вывода.

3. Запись посылок и заключения в виде сложного высказывания, которое с помощью формул алгебры логики упрощается до минимального и затем устанавливается его истинность или ложность.

Итак, умозаключение считается верным, правильным, если из истинных посылок оно не приводит к ложным заключениям.

Задача. Необходимо проверить, правильно ли сделан вывод в умозаключении: «Все студенты факультета программирования добросовестны в учебе или талантливы. Если они добросовестны, то систематически готовятся к занятиям. Поэтому, если студенты-программисты не будут готовиться к занятиям, то они должны быть талантливы».

Решение. Введем обозначения:

A: студенты-программисты талантливы;

B: студенты-программисты добросовестно относятся к учебе;

C: они систематически готовятся к занятиям.

Тогда данное умозаключение примет вид формулы

$$((A \vee B)(B \to C)) \Rightarrow (\overline{C} \to A) \text{ или } \frac{((A \vee B),\ (B \to C))}{\overline{C} \to A} \text{ или}$$
$$((A \vee B)(B \to C)) \Rightarrow (\overline{C} \to A).$$

Составим таблицу истинности для проверки справедливости этого умозаключения

A	B	C	$A \vee B$	$B \to C$	$(A \vee B)(B \to C)$	$\overline{C}$	$\overline{C} \to A$	$(A \vee B)(B \to C) \to (\overline{C} \to A)$
1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1

Строки последнего столбца свидетельствуют о том, что умозаключение истинно при любых значениях переменных *A, B, C*. Формулу можно было упростить, используя тождество $p \to q = \overline{p} \vee q$. Тогда

$$((A \vee B)(B \to C)) \to (\overline{C} \to A) =$$

$$= (A \vee B)(\overline{B} \vee C) \to (\overline{\overline{C}} \vee A) = \overline{(A \vee B)(\overline{B} \vee C)} \vee (C \vee A) = \overline{A \vee B} \vee \overline{\overline{B} \vee C} \vee$$
$$\vee\, C \vee A = \overline{A} \cdot \overline{B} \vee B\overline{C} \vee C \vee A = \overline{A} \cdot \overline{B} \vee B\overline{C} \vee C \vee A = \overline{B} \vee B\overline{C} \vee C = \overline{B} \vee$$
$$\vee\, \overline{C} \vee C = 1.$$ **Значит, вывод верен.**

Тема 4.2. Логика предикатов

4.2.1. Исчисление предикатов

Средства, предоставляемые логикой высказываний, оказываются недостаточными для анализа многих математических рассуждений. Например, средствами логики высказываний нельзя установить правильность такого рассуждения: «Всякое целое число является рациональным числом; 25 —целое число, следовательно, 25 —рациональное число». Это объясняется тем, что в логике высказываний простые высказывания, из которых с помощью логических операций строятся сложные, рассматриваются как нерасчленяемые. Поэтому возникает необходимость в построении такой логической системы, средствами которой можно исследовать строение тех высказываний, которые в логике высказываний рассматриваются как элементарные. Такой логической системой является логика предикатов, содержащая как часть логику высказываний.

В математике широко используются буквенные обозначения. Различные буквы могут обозначать как один и тот же объект, так и различные объекты. Используемые таким образом буквы называются **свободными переменными**.

Допустимыми значениями свободной переменной называются те объекты определенного вида, для обозначения которых употребляется эта переменная. Так, допустимыми значениями свободной переменной могут быть высказывания.

Рассмотрим предложение

1) $x+y = 3$, содержащее натуральные переменные *хну*. Это предложение не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать, истинно оно или ложно. Оно называется **предикатом** или **условием** (на x и y). Приведем другие примеры предложений с переменными:

2) x есть простое число;

3) x есть четное число;

4) x меньше y;

5) x есть общий делитель y, z.

Будем считать, что допустимыми значениями переменных x, y и z являются натуральные числа. Если в предложениях 1)—5) заменить переменные их допустимыми значениями, то получатся высказывания, которые могут быть как истинными, так и ложными. Например,

0 + 1=3;

2 есть простое число;

3 есть четное число;

5 меньше 7;

3 есть общий делитель 6 и 12.

Предложения с переменными, дающие высказывания в результате замены свободных переменных их допустимыми значениями, называются **предикатами**.

Предложения 1)—5) могут служить примерами предикатов.

По числу входящих свободных переменных различают предикаты **одноместные, двухместные, трехместные** и т. д. Предикаты 2) и 3) — одноместные, предикаты 1) и 4) — двухместные, предикат 5) — трехместный. Высказывания будем считать нульместными предикатами.

Заменяя в одноместном предикате {2) переменную натуральными числами, будем получать высказывания:

0 есть простое число;

1 есть простое число;

2 есть простое число;

3 есть простое число и т. д.

Некоторые из них являются истинными. Таким образом, данный одноместный предикат выделяет среди натуральных чисел те, при подстановке которых вместо переменной получается истинное высказывание, и его можно рассматривать как условие на значения свободной переменной, входящей в предикат. В данном случае числа, удовлетворяющие этому условию, — простые.

Одноместный предикат можно рассматривать как условие на объекты данного вида; двухместный — как условие на пары объектов данного вида и т. д.

Предикаты можно задавать различными способами. В алгебре часто рассматривают предикаты, заданные с помощью уравнений, неравенств, а также систем уравнений или неравенств. Например, неравенство $x + x^{-1} > 0$ задает одноместный предикат, уравнение $x^2 + y = 0$ — двухместный, а система уравнений $x + y = 0$, $x — y + z = 0$ — трехместный (x, y, z — рациональные переменные).

Обозначать предикаты будем большими буквами латинского алфавита (возможно, с нижними индексами) с указанием в скобках всех свободных переменных, входящих в этот предикат. Например, A (x,y) —обозначение двухместного предиката, R(x, y, z) — трехместного и $Q(x_1 ..., x_п)$ — обозначение n-местного предиката.

В дальнейшем мы будем говорить об истинностном значении произвольного предиката на том или ином наборе входящих в него свободных переменных, понимая под этим истинностное значение высказывания, которое получается в результате замены свободных переменных соответствующими им значениями из рассматриваемого набора.

Высказывание, которое получается при подстановке в предикат $R(x_1 ..., x_n)$ набора допустимых значений $(a_1 ..., a_n)$ вместо его переменных, будем обозначать $R(a_1 ..., a_n)$. Если это высказывание истинное (ложное), говорят, что набор значений $(a_1 ..., a_n)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) предикату $R(x_1 ..., x_n)$.

Отметим, что следует различать предикаты, выражающие одно и то же условие, но имеющие переменные с различными допустимыми значениями. Например, предикат, заданный уравнением $2x — 3 = 0$, где x — целочисленная переменная, следует отличать от предиката, заданного тем же уравнением, если при этом x рассматривается как рациональная переменная. Первый предикат не принимает значений «истина» ни при каких допустимых значениях $x>$ а второй принимает значение «истина» при допустимом значении переменной $x={}^3/_2$- Таким образом, при задании предиката нужно указывать область допустимых значений переменных этого предиката.

Предикаты, как и высказывания, принимают значения 1 и 0, поэтому над ними можно производить логические операции, аналогичные операциям логики высказываний.

Начнем с простого частного случая — одноместных предикатов, у которых области допустимых значений переменных совпадают. Образуем из двух предикатов $P(x)$ и

$Q(y)$ новый предикат $P(x) \wedge Q(y)$. Это предикат от двух свободных переменных x и y, и истинностное значение его на любом наборе (a, b) допустимых значений переменных определяется как истинностное значение высказывания $P(a) \wedge P(b)$. Аналогично определяются предикаты

$$P(x) \vee Q(y),\ \neg P(x),\ P(x) \rightarrow Q(y),\ P(x) \leftrightarrow Q(y).$$

Следует различать предикаты: двухместный $P(x) \wedge Q(y)$ и одноместный $P(x) \wedge Q(x)$; в первый допустимые значения подставляют вместо свободных переменных x и y независимо друг от друга, а во второй — вместо единственной свободной переменной x.

Над многоместными предикатами аналогично определяются операции: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация и эквиваленция. Рассмотрим, например, случай двухместных предикатов. Пусть $P(x,y)$, $Q(y, z)$ — два предиката, у которых совпадают области допустимых значений переменных. Тогда $P(x,y) \wedge Q(y,z)$ есть трехместный предикат от x, y, z, истинностное значение которого на любом наборе (a, b, c) допустимых значений свободных переменных определяется как значение высказывания $P(a_t\ b) \wedge Q(b> c)$. Заметим, что при рассмотрении операций над предикатами нужно следить, какие переменные обозначены различными буквами, а какие —одинаковыми.

Рассмотрим еще несколько примеров:

1) $A(x) \vee B(x, y)$ — предикат от свободных переменных x и y;
2) $\neg A(y) \wedge D(z, x)$ — предикат от свободных переменных x, y, z;
3) $E(x, y, z) \rightarrow F(z)$ — предикат от свободных переменных x, y, z.

Предикат $A(x) \vee B(x, y)$ принимает значение 1 на наборе значений (a, b), если хотя бы одно из высказываний $A(a)$ и $B(a, b)$ будет истинно, и принимает значение 0, если оба эти высказывания ложны. Аналогично можно установить истинностные значения остальных предикатов на том или ином наборе значений свободных переменных.

Логическое следствие. Равносильные предикаты.

Предикат $A(x_1, ..., x_n)$ называется **тождественно истинным**, если для любого набора допустимых значений входящих в него свободных переменных его истинностным значением является 1.

Примером тождественно истинного предиката может служить трехместный предикат, заданный неравенством $(x + y)^2 + Z^2 \geq 0$ где x, y, z — рациональные переменные.

Пусть $A(x_1,..., x_m)$ и $B(y_1,..., y_n)$ — предикаты, имеющие одинаковые области допустимых значений свободных переменных.

Предикат $B(y_1,..., y_n)$ называется **логическим следствием предиката** $A(x_1,..., x_m)$, если предикат $A(x_1,..., x_m) \rightarrow B(y_1,..., y_n)$ является тождественно истинным.

Запись $A(x_1,.., x_m) \models B(y_l,..., y_n)$ означает, что предикат $B(y_1,..., y_n)$ есть логическое следствие предиката $A(x_1 ,.., x_m)$.

Например, если x — целочисленная переменная, $R(x)$ — обозначение предиката «x — четное число», $P(x)$ — обозначение предиката «x кратно 4», то $R(x)$ логически следует из $P(x)_9$ т. е. $P(x)\backslash==R(x)$. Здесь предикат $P(x)$ не следует логически из предиката $R(x)$.

Предикат $B(z_l, ..., z_n)$ называется **логическим следствием** предикатов $A_1(x_1 ,..., x_m),..., A_k(y_1 ,..., y_l)$если предикат

$A_1(x_1 ,..., x_m)\wedge... \wedge A_k(y_1 ,..., y_l)\rightarrow B(z_l, ..., z_n)$

является тождественно истинным. (При этом предполагается, что все свободные переменные рассматриваемых предикатов имеют одни и те же допустимые значения.) Пример. Пусть $P(x)$ — предикат «x;— четное число», $Q(x)$ — предикат «x кратно трем», $R(x)$ — предикат «x кратно шести». Тогда $P(x),Q(x)|=R(x)$.

Предикаты $A(x_l,..., x_m)$ и $B(y_1,...,y_n)$ называются *равносильными (логически эквивалентными),* если предикат $A(x_l,..., x_m) \leftrightarrow B(y_1,...,y_n)$ является тождественно истинным. Запись $A(x_1,..., x_m) \equiv B(y_1,...,y_n)$означает, что предикаты $A(x_l,..., x_m)$ и $B(y_1,...,y_n)$ равносильны.

Легко видеть, что предикаты $A(x_l,..., x_n)$ и $B(y_1,...,y_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда $A(x_l,...,x_m) |=B(y_1,...,y_n)$ и $B(y_1,...,y_n) |= A(x_l,...,x_m)$

Нетрудно доказать, что предикаты $A(x_l,..., x_m)$ и $B(x_l,..., x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их истинностные значения совпадают на любом наборе допустимых значений переменных x_{19} ..., x_n. Примером равносильных предикатов могут служить предикаты, заданные уравнениями $x^3 — y^3=0$ и $2(x— y)(x^2+ xy+y^2)=0$, где x, у—рациональные переменные.

Предикат $A(x_1, ..., x_n)$ называется **тождественно ложным**, если его истинностным значением является 0 для любого набора допустимых значений входящих в него свободных переменных.

Например, тождественно ложным является предикат $x+1=x$, где x— целочисленная переменная.

Предикат $A(x_1, ..., x_n)$ называется **выполнимым**, если существует хотя бы один набор допустимых значений входящих в него свободных переменных, на котором его истинностным значением является 1.

Например, выполнимыми являются предикаты «а —простое число», «x делится на y».

Из данных определений вытекает, что тождественно истинный предикат логически следует из любого предиката, а из тождественно ложного предиката логически следует любой предикат.

Любой предикат либо тождественно истинен, либо выполним, либо тождественно ложен.

4.2.2. Формализация предложений с помощью логики предикатов

Рассмотрим новые операции, которые применяются к предикатам или высказываниям и дают в результате их применения предикаты или высказывания. Эти операции выражают утверждения общности или существования.

Квантор общности. Пусть *A (x)* — предикат от одной свободной переменной *x.* Под выражением $\forall xA(x)$ будем подразумевать высказывание, истинное, если *A (x)* принимает значение 1 для всех допустимых значений переменной *x,* т. е. если предикат *A (x)* тождественно истинен, и ложное в противном случае. Высказывание $\forall xA(x)$ уже не зависит от *x.* Символ $\forall x$, приписываемый слева к предикату *A (x),* называется *квантором общности* по переменной *x.* Если же *A* есть высказывание, то $\forall xA(x)$ есть высказывание, истинное тогда и только тогда, когда *A* истинно.

Рассмотрим теперь предикат от нескольких свободных переменных, например предикат *A (x, y, z)* от трех переменных. Этот предикат при произвольной замене всех свободных переменных, кроме *x,* их значениями b *и с* представляет собой предикат, зависящий только от свободной переменной *x,* а выражение

$$\forall xA(x,b,c)$$

есть высказывание. Предикат $\forall xA(x,y,z)$ становится высказыванием в результате задания значений всех входящих в него свободных переменных, кроме *x,* значит, от *x* не зависит. Таким образом, $\forall xA(x,y,z)$ зависит от всех свободных переменных, входящих в *A(x, y, z),* кроме *x,* т. е. это двухместный предикат от *y* и *z.* Этот предикат на данном наборе значений свободных переменных *b, с* принимает значение 1 тогда и только тогда, когда предикат *A(x, y, z),* зависящий только от одной свободной переменной *x,* является тождественно истинным. Символ $\forall x$ можно читать так: «для всякого *x»* или «для всех *x»,* а запись $\forall xA(x,y,z)$ читается так: «для всякого *x* имеет место *A (x, y,z)»* или, короче, «для каждого *x A (x, y,* z)».

Переменная *x,* от которой предикат $\forall xA(x,y,z)$ не зависит, называется **связанной переменной** (в отличие от переменных y_t *z,* которые являются **свободными**).

Для квантора существования употребляется символ $\exists x$, приписываемый слева к предикату или высказыванию. Пусть *A (x)* — предикат от одной свободной переменной *x.* Под выражением $\exists xA(x)$ будем подразумевать высказывание, истинное, если *A (x)* принимает значение 1 хотя бы для одного из допустимых значений переменной *x,* т. е. предикат *A (x)* является выполнимым, и ложное в противном случае.

Пусть теперь *A(x, y, z)* есть трехместный предикат. Если в этом предикате заменить все свободные переменные, кроме *x* их значениями, например значениями *b, c,* то получится предикат *A (x, b,* с), зависящий только от одной свободной переменной *x,* а выражение

$\exists x A(x,b,c)$ будет высказыванием. Значит, выражение $\exists x A(x,y,z)$ есть предикат, становящийся высказыванием в результате задания значений всех свободных переменных, кроме *x* и, значит, от *x* не зависит. Таким образом, выражение $\exists x A(x,y,z)$ есть предикат, зависящий только от *y* и *z,* значит, применение квантора к трехместному предикату привело к двухместному предикату. Переменная *x,* от которой предикат $\exists x A(x,y,z)$ не зависит, называется **связанной переменной**.

Предикат $\exists x A(x,y,z)$ принимает значение 1 на данном наборе *b, c* допустимых значений тогда и только тогда, когда одноместный предикат *A (x, b, c)* выполним.

Символ $\exists$ называется *квантором существования* по переменной *x* и читается так: «существует *x* такое, что». Выражение $\exists x A(x,y,z)$ читается так: «хотя бы при одном *x* имеет место *A (x, y, z)* или «существует такое *x,* что *A(x, y, z)*».

К одному и тому же предикату можно применять кванторы несколько раз. Например, применив к предикату *A(x, y)* квантор существования по *x,* мы получим одноместный предикат $\exists x A(x,y)$, *к* которому опять можем применить квантор существования или квантор общности по переменной *y.* В результате получим высказывание

$$\exists y(\exists x A(x,y,z)) \text{ или } \forall y(\exists x A(x,y,z)).$$

Скобки обычно опускают, получая при этом выражения

$$\exists y \exists x A(x,y,z) \text{ или } \forall y \exists x A(x,y,z)).$$

Отметим, что одинаковые кванторы можно переставлять, получая при этом эквивалентные высказывания, т. е. истинные эквиваленции:

$$\forall x \forall y (x,\ y) \leftrightarrow \forall y \forall x A\,(x,\ y);$$
$$\exists x \exists y A\,(x,\ y) \leftrightarrow \exists y \exists x A\,(x,\ y).$$

Применение к предикату одного или нескольких кванторов (общности, существования) называется *квантификацией.*

Рассмотрим применение кванторов на примере. Пусть $x+y > 0$ — двухместный предикат, где *x* и *y*-целочисленные переменные. Этот предикат выражает положительность суммы двух целых чисел и представляет собой некоторое высказывание всякий раз, когда переменным *x* и *y* придаются конкретные значения. Если к этому предикату применить квантор существования по переменной у, то получится одноместный предикат

$$\exists y\,(x+y>0).$$

Когда переменной *x* этого предиката придается какое-либо значение, то получается высказывание. Предикат $\exists y\,(x+y>0)$ истинен для тех значений переменной *x,* для которых существует целое число *y,* дающее в сумме с *x* положительное число. Легко убедиться, что этот предикат тождественно истинен, поэтому если применить к нему квантор общности по переменной *x,* то получится истинное высказывание

$$\forall x \exists y\,(x+y>0),$$

утверждающее, что для всякого целого числа *x* существует некоторое целое число *y* такое, что их сумма положительна. Это высказывание надо отличать от высказывания

$$\exists y \forall x\,(x+y>0),$$

утверждающего, что существует целое число, сумма которого со всяким целым числом положительна. Это последнее высказывание ложно.

Запись высказываний на языке логики предикатов. Рассмотрим четыре основных типа высказываний, часто встречающихся в математике. В символической записи этих высказываний (записи на языке логики предикатов) используются кванторы.

Пусть *A (x)* — обозначение предиката *«x* — нечетное число», а *B (x)* — обозначение предиката *«x* — простое число», где *x* — целочисленная переменная.

1. Высказывание «Всякое нечетное число является простым числом» можно переформулировать следующим образом: «Для всякого *x,* если *x* — нечетное, то *x* — простое число». Теперь ясно, что это высказывание на языке предикатов запишется так:

$$\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x)).$$

2. Высказывание «Никакое нечетное число не является простым числом», или «Для всякого *x,* если *x* — нечетное, то *x* не является простым», в символической форме запишется так:

$$\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x)).$$

Заметим, что истинностное значение высказывания в наших рассуждениях не играет роли.

3. Следующий тип высказывания: «Некоторые нечетные числа — простые». Суть его в том, что существует такое *x,* которое одновременно является и нечетным числом, и простым. Поэтому высказывание третьего типа на языке логики предикатов запишется в виде

$$\exists x\,(A(x) \wedge B(x)).$$

Эта последняя запись не эквивалентна записи

$$\exists x\,(A(x) \rightarrow B(x))$$

К четвертому типу относится высказывание «Некоторые нечетные числа не являются простыми»:

$$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x)).$$

Рассмотренные примеры показывают, как любое высказывание, относящееся к одному из четырех основных типов, можно записать в символической форме.

Рассмотрим равносильностей, играющих большую роль в логике предикатов:

Равносильность $\neg(\forall x A(x) \equiv \exists x(\neg A(x))$ соответствует высказыванию «Существует объект *x,* не удовлетворяющий условию *A(x)*».

Равносильность

$$\neg(\exists x A(x)) \equiv \forall x (\neg A(x))$$

соответствует тому, что высказывание «Неверно, что существует объект *x* удовлетворяющий условию *A(x)»* обычно понимают в том же смысле, что и высказывание «Ни один объект *x* не удовлетворяет условию *A(x)».*

Применяя отрицание к обеим частям (1) и (2) и учитывая закон двойного отрицания, получаем еще две равносильности:

$$\forall x A(x) \equiv \neg(\exists x \neg A(x));$$
$$\exists x A(x) \equiv \neg(\forall x \neg A(x));$$

они показывают, что квантор существования можно выразить через квантор общности и наоборот.

Следующие две равносильности выражают свойства дистрибутивности квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции:

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x));$$
$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)).$$

Тема 4.3. Индуктивные умозаключения и их виды

4.3.1. Методы установления причинных связей

Индукция (от лат. *inductio* — наведение) — вид умозаключений, при котором на основании анализа частных суждений о принадлежности признака отдельным элементам множества делается вывод о принадлежности этого признака всему множеству. Обобщим виды индукции.

Оказывается, для проверки индуктивных умозаключений необходимо большое число частных случаев, примеров, опытов, подтверждающих данный вывод. Но для опровержения индуктивного умозаключения достаточно одного *единственного* контрпримера, противоречащей инстанции. Так, для подтверждения того, что все жвачные животные имеют рога, надо приводить в качестве примера *все* множество жвачных животных: коз, оленей, коров и т.д. Но для опровержения достаточно в качестве *единственного* примера использовать верблюда.

Наблюдения в любой области знаний могут привести к определенным индуктивным выводам. Ряд сходных, частных примеров выполнения некоторого свойства дает возможность сформулировать гипотезу о том, что все элементы рассматриваемого множества обладают этим свойством.

Чтобы доказать справедливость операции обобщения в каждом конкретном случае, необходимо иметь информацию о том, что действительно все элементы рассматриваемого множества обладают исследуемым свойством.

В таком случае справедливость гипотезы придется доказывать с помощью неполной индукции, но при этом получать не достоверные, а *вероятностные* выводы. В математике разработан способ, позволяющий сделать достаточно точный *правдоподобный* вывод, не проверяя непосредственно все элементы исследуемого множества. Этот метод называется **методом (полной) математической индукции (ММИ).**

Как правило, индуктивные выводы осуществляются по следующему алгоритму.

1. *Сравнить* различные элементы некоторого множества.
2. *Подметить* некоторое общее свойство, которым обладают элементы этого множества.
3. *Сформулировать* это свойство для изученных элементов, т.е. сформулировать *гипотезу.*
4. *Обобщить* вывод на более широкий класс элементов, на все множество.

Прислушаемся к мнению Д. Пойа, высказанному в работе «Математика и правдоподобные рассуждения».

«В нашей личной жизни мы часто цепляемся за иллюзии, но в науке мы нуждаемся в совершенно ином подходе, в *индуктивном подходе.* Этот подход имеет целью приспособление наших представлений к нашему опыту в такой степени, в какой это возможно. Он требует говорить *"быть может"* и *"возможно"* с тысячей различных оттенков. Он требует многих других вещей, и особенно следующих трех:

Во-первых, мы должны быть готовы пересмотреть любое из наших представлений. Во-вторых, мы должны изменить представления, имеются веские обстоятельства, вынуждающие его изменить. В-третьих, мы не должны изменять представления произвольно, без достаточных оснований.

Первый принцип требует "мужества ума". Вам нужно мужество, чтобы пересмотреть ваши представления. Галилей, бросивший вызов предрассудку своих современников и авторитету Аристотеля, являет собой великий пример мужества ума.

Второй принцип требует "честности ума". Оставаться верным моему предположению, ясно опровергнутому опытом, только потому, что это мое предположение, было бы нечестно.

Третий принцип требует "мудрой сдержанности". Изменить представление без серьезного исследования, например только ради моды, было бы глупо...

Смелость ума, честность ума и мудрая сдержанность — моральные достоинства ученого».

Итак, индуктивный принцип, лежащий в основе не только деятельности ученых, но и обычных разумных людей, заключается в том, что «...предположительное общее утверждение становится более правдоподобным, если оно подтверждается для нового частного случая».

Все явления природы и общества находятся в определенных причинных взаимосвязях. Знания о различных явлениях означают, что нам известны причины, породившие это явление, процесс его развития и его последствия — причины следующих явлений.

Всеобщий характер причинно-следственных связей нашел подтверждение в диалектическом единстве случайного и закономерного. В логике еще с XVI в., со времен Фрэнсиса Бэкона и Джона Стюарта Милля, разработаны специальные методы установления причины, породившей то или иное явление. Все методы установления причинных связей носят индуктивный характер. Основной прием, применяемый для установления причинных связей, — сравнение.

4.3.2. Метод математической индукции

Метод полной индукции имеет весьма ограниченную область применения в математике, поскольку большинство рассматриваемых множеств бесконечны: множество натуральных чисел, множество простых чисел, множество многогранников и т.д. Проверить справедливость гипотезы напрямую при бесконечном множестве исследуемых объектов невозможно.

В таких случаях применяется метод рассуждений, заменяющий полный перебор всех вариантов, который также дает достоверный вывод. Этот метод носит название **метода математической индукции** (ММИ). С помощью ММИ определяются сложение и умножение натуральных чисел, свойства этих операций, вводятся отношения «больше» и «меньше» и их свойства. Так, с помощью ММИ можно доказать одно из важнейших свойств натуральных чисел — свойство полной упорядоченности (в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число).

Смысл ММИ заключается в применении алгоритма:

1. Утверждение проверяется для некоторого начального элемента, например для n=1 (этот этап называется *базой индукции*).
2. Формулируется гипотеза о том, что утверждение справедливо для некоторого $k \in N$ (этот этап называется *шагом индукции*).
3. Доказывается (устанавливается истинность утверждения), что если из того, что утверждение справедливо для произвольного $k \in N$ следует, что оно справедливо и для $\forall k+1 \in N$, то оно справедливо для любого натурального числа: $\forall n \in N$.

Метод математической индукции чаще всего применяется к *натуральным* числам и *счетным* множествам для доказательства формул, неравенств, делимости натуральных чисел.

Даже если в результате применения ММИ получается заведомая ложь или упрощение не получается вовсе, то сначала нужно попытаться опровергнуть гипотезу логическим путем. Например, можно привести один факт, разоблачающий ее. Если это не получается, то нужно искать другие логически корректные методы доказательства утверждения, поскольку из ложной или неопределенной посылки может следовать все, что угодно.

Задача 1. Доказать, что $\forall n \in N$ справедливо равенство:

$$1+4+7+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

Решение*:*

База. Проверим равенство при $n = 1$. Имеем $1=\frac{1\cdot(3\cdot1-1)}{2}$, $1 = 1$ — значит, формула верна.

Шаг.: Пусть формула справедлива для $n = к$. $1+4+7+...+(3k-2)=\frac{k(3k-1)}{2}$.

Доказываем, что формула верна для $n = к + 1$, т.е. имеет место выражение

$$1+4+7+...+(3k-2)+(3(k+1)-2)=\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}.$$

Упростив выражение и воспользовавшись гипотезой, имеем

$$\frac{k(3k-1)}{2}+\frac{(3k+1)}{1}=\frac{(k+1)(3k+2)}{2},$$

что после приведения к общему знаменателю примет вид

$$\frac{3k^2+5k+2}{2}=\frac{3k^2+5k+2}{2}.$$

Видим, что формула справедлива для $n = к + 1$ при условии ее выполнимости при $n = к$, следовательно, она справедлива для любого натурального числа $n \in N$.

Задача2.Доказать по индукции следующее равенство (которое допускает и другие доказательства): $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$.

Решение:

База. При $n = 1$ равенство превращается в тождество $1 = 1\cdot(1 + 1)/2$.

Шаг. Пусть равенство выполнено при $n = k$: $1 + 2 + 3 + ... + k = k(k + 1)/2$.

Прибавим к обеим частям этого равенства $k + 1$. В левой части мы получим сумму $1 + 2+ 3 + ... + k + (k + 1)$, а в правой - k(k+1)/2+(k+1)=(k(k+1)+2(k+1))/2=((k+2)(k+1))/2. Итак, $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$, а это и есть требуемое равенство при $n = k + 1$.

Задача 3.Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство

$1+2+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$.

Решение:

База. Докажем равенство при $n=1$. Левая часть равенства – сумма степеней двойки начиная с нулевой, так как $2^0=1$, и заканчивая n - ной. Значит, количество слагаемых в левой части равенства равно $n+1$. Таким образом, при $n=1$ число слагаемых равно двум, т.е. значение выражения левой части равно $1+2^1=1+2=3$. Значение выражение в правой части равенства вычислим, подставляя вместо n единицу, получим $2^{1+1}-1=2^2-1=4-1=3$. Теперь рассмотрим возможную запись приведенных рассуждений.

$n=1 \quad \Rightarrow \quad 1+2^1=2^{1+1}-1,$

$3=3$ (верно)

Шаг. Допустим, равенство верно при $n=k$, для любого фиксированного натурального k, т.е. верно равенство

$$1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1.$$

Докажем справедливость равенства при $n=k+1$, т.е. докажем равенство

$$1+2+2^2+\ldots+2^k+2^{k+1}=2^{k+2}-1.$$

Заменим первые $k+1$ слагаемое, получим

$$(1+2+2^2+\ldots+2^k)+2^{k+1}=2^{k+2}-1,$$

$$(2^{k+1}-1)+2^{k+1}=2^{k+2}-1,$$

$$2^{k+1}+2^{k+1}-1=2^{k+2}-1,$$

$$2\cdot 2^{k+1}-1=2^{k+2}-1,$$

$$2^{k+2}-1=2^{k+2}-1 \text{(верно)}.$$

Таким образом, данное равенство верно для любого натурального n.

Задача 3. Доказать, что для любого $n\in N$ $4^n+15n-1$ делится на 9.

Решение:

1. База. Проверим утверждение при $n=1$. 4+15-1=18 делится на 9.

2. Шаг. Допустим, утверждение выполняется при $n=m$, то есть $4^m+15m-1$ делится на 9. Докажем, что утверждение справедливо при $n=m+1$, используя индуктивное предположение, то есть докажем, что $4^{m+1}+15(m+1)-1$ делится на 9.

$$4^{m+1}+15(m+1)-1=4\cdot 4^m+15m+15-1=$$
$$=(4^m+15m-1)+(3\cdot 4^m+15).$$

Первая скобка делится на 9 по индуктивному предположению. Осталось доказать, что вторая скобка делится на 9, то есть надо доказать, что 4^m+5 делится на 3. Это утверждение мы будем доказывать методом математической индукции, то есть нам придется применять *"индукцию в индукции"*. При *m=1* 4+5=9 делится на 3. Допустим, 4^k+5 делится на 3. Докажем, что $4^{k+1}+5$ делится на 3, но $4^{k+1}+5=4\cdot 4^k+5=\left(4^k+5\right)+3\cdot 4^k$. Первое слагаемое делится на три по индуктивному предположению, а второе – очевидно. Таким образом, мы доказали, что 4^m+5 делится на 3, а вместе с этим, что $4^n+15n-1$ делится на 9.

Задача 4. При каких натуральных значениях n верно неравенство $2^n > n^2$?

Доказательство:

Проверяем неравенство при $n = 1;2;3;\ldots$ Впервые верное неравенство получаем при $n=5^{32}>25$. Допустим, неравенство верно при $n = k \geq 5$, то есть $2^k > k^2$. Докажем, что данное неравенство верно при $n = k+1$, т.е. $2^{k+1} > (k+1)^2$. Это неравенство равносильно $2^k + 2^k > k^2 + 2k + 1$. Если мы докажем, что $2^k > 2k+1$ $(k \geq 5)$, то будет доказано и исходное неравенство. Неравенство $2^k > 2k+1$ $(k \geq 5)$ доказываем индукцией *(индукция в индукции)*. При $k = 5$ имеем верное неравенство $32 > 11$. Допустим, неравенство верно при $k = m$, то есть $2^m > 2m+1$. Докажем справедливость неравенства при $k = m+1$, то есть докажем, что $2^{m+1} > 2(m+1)+1 = 2m+3$ или $2^m + 2^m > 2m+1+2$. Очевидно, что это неравенство верно, так как $2^m > 2$ при $n > 1$, и тем более при $n \geq 5$, а $2^m > 2m+1$ в силу индуктивного предположения.

РАЗДЕЛ 4. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИКУМУ

Практическая работа №1

Решение задач с применением операций над сложными высказываниями

1. Составить таблицу истинности для следующих формул и построить геометрическую интерпретацию:

а) $x \to (x \wedge y)$

б) $x \to (y \vee z)$

в) $(x \vee y) \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$

г) $(x \vee \bar{y}) \to ((y \wedge \bar{z}) \to (x \vee (y \leftrightarrow z)))$

2. Применяя таблицы истинности, доказать тождественную истинность формул:

а) $((x \vee y) \wedge \bar{x}) \to y$

б) $((x \to y) \wedge \bar{y}) \to \bar{x}$

3. Применяя таблицы истинности, доказать равносильность формул:

а) $x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$ и $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$

б) $x \leftrightarrow y$ и $(x \to y) \wedge (y \to x)$

4. Используя законы алгебры логики, преобразовать:

а) $(\bar{x} \vee y) \wedge \bar{y}$

б) $\overline{\bar{x} \wedge y} \vee \overline{x \wedge y}$

Практическая работа №2

Решение задач на преобразование формул логики

Применяя равносильные преобразования доказать следующие соотношения:

1) $x \vee y = \overline{\bar{x}\ \bar{y}}$

2) $xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$

3) $x \to y = \overline{x\bar{y}}$

4) $x \to y = \bar{y} \to \bar{x}$

5) $xy \vee x\bar{y} = x$

6) $x \vee xy = x$

7) $x(y \vee x) = x$

8) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$

9) $\bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y$

10) $(x \to y) \to y = x \vee y$

11) $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x$

12) $\bar{x} \vee \bar{y} = y \to \bar{x}$

Применяя равносильные преобразования доказать тождественную истинность формул:

1) $x \to y \vee x$

2) $xy \to x$

3) $\bar{x} \to (x \to y)$

4) $(x \to y) \to (\bar{x} \vee y)$

5) $(\bar{x} \to y) \to (\bar{y} \to x)$

6) $(\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x)$

7) $(x \to y) \vee (y \to x)$

8) $(x \to y) \vee (x \to \bar{y})$

9) $x \to (y \to xy)$

10) $(x \to y)x \to y$

11) $(x \to y)\bar{y} \to \bar{x}$

12) $(x \vee y)\bar{x} \to y$

13) $(x \to y)(y \to z) \to (x \to z)$

14) $(x \to (y \to z)) \to (xy \to z)$

15) $(x \to y)(y \to z) \to (x \vee y \to z)$

16) $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$

Применяя равносильные преобразования, «упростить»:

1) $\overline{\bar{x}\,\bar{y}} \vee (x \to y)x$

2) $(\overline{\bar{x} \vee y} \to x \vee y)y$

3) $\overline{(x \to y)(y \to x)}$

4)) $(x \vee y)(x \leftrightarrow y)$

5) $(x \to y)(y \to z) \to (z \to x)$

6) $xz \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}yz$

7) $\overline{xy(x \to y)}$

8) $xy(x \leftrightarrow y)$

9) $(x \to \bar{y})(x \leftrightarrow \bar{y})$

10) $(x \to \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y})$

Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только «∧» и «⌉»

1) $x \vee y$

2) $x \to y$

3) $x \leftrightarrow y$

4) $x \vee y \vee z$

5) $x \to (y \to z)$

6) $x \vee (y \leftrightarrow z)$

7) $\overline{x \to y} \vee (\bar{x} \to \bar{y})$

8) $x \vee (y \leftrightarrow z)$

Практическая работа №3

Представление булевой функции в виде совершенной ДНФ, совершенной КНФ, минимальной ДНФ

1. Построить СДНФ и СКНФ по заданной таблице истинности.
2. Минимизировать полученную СДНФ с помощью карт Карно.
3. Проверить полученный в п. 2 результат путем равносильных преобразований.
4. Построить соответствующий логический элемент.

1 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	0	1

2 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	1	0	0

1	0	1	0
1	1	1	0

1	0	1	1
1	1	1	1

3 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

4 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

5 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1

6 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

7 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1

8 вариант

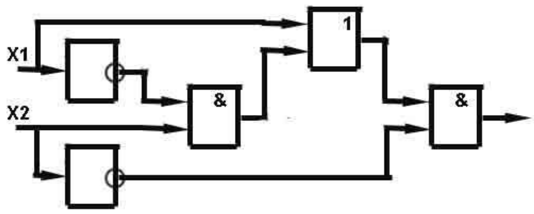
x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Практическая работа №4
Построение логических схем

Для данных логических схем:

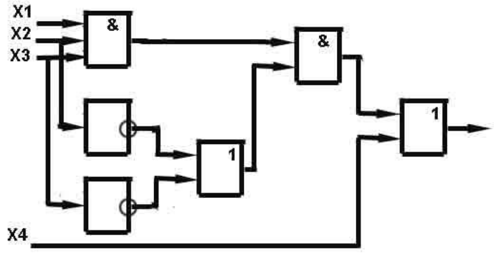
1. Написать логическое выражение.
2. Упростить выражение
3. Построить новую логическую схему.

а)


X1
X2
1
&
&

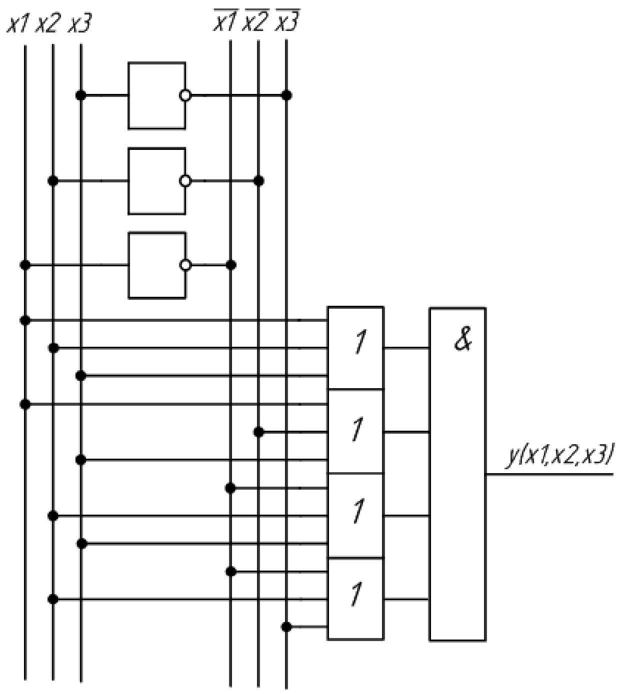
б)

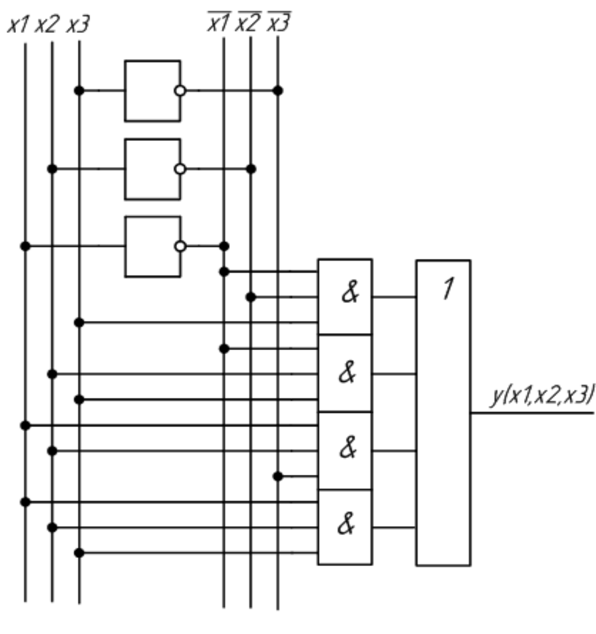
x_2


X1
X2
X3
X4
&
&
1
1

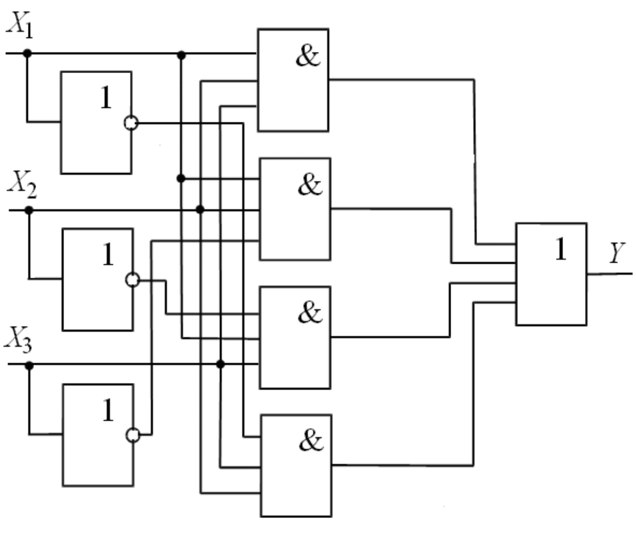
в)

г)


x1 x2 x3
$\overline{x1}$ $\overline{x2}$ $\overline{x3}$
1
1
1
1
&
y(x1,x2,x3)


x1 x2 x3
$\overline{x1}$ $\overline{x2}$ $\overline{x3}$
&
&
&
&
1
y(x1,x2,x3)

д)


X_1
X_2
X_3
1
1
1
&
&
&
&
1
Y

Практическая работа №5

Представление булевых функций в виде полинома Жегалкина.

1. Представить в виде полинома Жегалкина булеву функцию, заданную таблично:

1 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

2 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

3 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

4 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

5 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

6 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

7 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1

8 вариант

x1	x2	x3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0

1	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

2. Представить в виде полинома Жегалкина булеву функцию, заданную аналитически:

1 вариант

$f(x,y)=\bar{x}\,\bar{y}$

2 вариант

$f(x,y)=\bar{x}\,y$

3 вариант

$f(x,y)=\bar{x}\vee\bar{y}$

4 вариант

$f(x,y)=\bar{x}\vee y$

5 вариант

$f(x,y)=x\vee\bar{y}$

6 вариант

$f(x,y)=\overline{x\vee y}$

7 вариант

$f(x,y)=\overline{x\,y}$

8 вариант

$f(x,y)=\overline{x\vee\bar{y}}$

Практическая работа №6

Исследование булевой функции на принадлежности на к классам T0, T1, L, M, S

1. Определите принадлежность функций к классам T0, T1, L, M, S аналитически и с помощью таблиц истинности:

1) $x\vee y$

2) $x\to y$

3) $x\leftrightarrow y$

4) $x\vee y\vee z$

5) $x\to(y\to z)$

6) $x\vee(y\leftrightarrow z)$

7) $\overline{x\to y}\vee(\bar{x}\to\bar{y})$

8) $x\vee(y\leftrightarrow z)$

2. Найдите двойственные функции и заполните таблицу. Докажите двойственность аналитически и с помощью таблиц истинности:

F	0	1	X	$\bar{X}$	$X_1\vee X_2$	$X_1\wedge X_2$	$X_1\downarrow X_2$	$X_1\to X_2$	$X_1\equiv X_2$	$X_1\oplus X_2$
F^*										

Практическая работа №7

Решение задач на применение теоретико-множественных операций над множествами; основных принципов теории алгоритмов

1. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?
2. Из 40 предложений 30 содержат предлог «в», 27 предлог «на», в пяти предложениях нет ни того, ни другого. Сколько предложений содержат оба предлога?
3. 20 мальчиков поехали на пикник. При этом 5 из них обгорели, 8 были сильно покусаны комарами, а 10 остались всем довольны. Сколько обгоревших мальчиков не было покусано комарами? Сколько покусанных комарами мальчиков также и обгорели?

4. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет, В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

5. В олимпиаде по иностранному языку принимало участие 40 студентов, им было предложено ответить на один вопрос по лексикологии, один по страноведению и один по стилистике. Результаты проверки ответов представлены в таблице:

Получены правильные ответы на вопросы	Количество ответивших
по лексикологии	20
по страноведению	18
по стилистике	18
по лексикологии и страноведению	7
по лексикологии и стилистике	8
по страноведению и стилистике	9

Известно также, что трое не дали правильных ответов ни на один вопрос. Сколько студентов правильно ответили на все три вопроса? Сколько студентов правильно ответили ровно на два вопроса?

Практическая работа №8
Применение аппарата алгебры высказываний для работы с умозаключениями

1. Андрей, Ваня и Саша собрались в поход. Учитель, хорошо знавший этих ребят, высказал следующие предположения:

а) Андрей пойдет в поход только тогда, когда пойдут Ваня и Саша;

б) Андрей и Саща друзья, а это значит, что они пойдут вместе или же оба останутся дома;

в) чтобы Саша пошел в поход, необходимо, чтобы пошел Ваня.

Когда ребята пошли в поход, оказалось, что учитель немного

ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из названных ребят пошел в поход?

2. Петя решил поступить в МГУ и послал домой три сообще ния:

а) если я сдам математику, то физику я сдам только при усло вии, что не завалю сочинение;

б) не может быть, чтобы я завалил сочинение и математику;

в) достаточное условие завала по физике — это двойка по со чинению.

После сдачи экзаменов оказалось, что из трех сообщений только одно было ложным. Как Петя сдал экзамены?

3. У разбойника, посаженного в тюрьму, было три сообщника, от каждого из которых он получил по одному письму.

1-е письмо: «Для того чтобы твой побег состоялся, достаточно, чтобы стража была подкуплена только тогда, когда будет закончено рытье подкопа».

2-е письмо: «Если стража будет подкуплена, то достаточное условие твоего побега будет состоять в своевременном рытье подкопа».

3-е письмо: «Если рытье подкопа будет закончено, то необходимо подкупить стражу. Но стражу подкупить не удается. Значит, побег невозможен».

Разбойник знал, что только один из его сообщников говорит правду, а остальные всегда обманывают. Значит, из полученных трех сообщений истинно только одно. Какую информацию получил разбойник?

4. Разбойник, посаженный в тюрьму, послал своим сообщникам две записки:

а) «Для побега достаточно, чтобы стража была подкуплена только тогда, когда вам удастся передать мне веревочную лестницу»;

б) «Для совершения побега достаточно, чтобы стража была подкуплена и мне была передана веревочная лестница».

На следующий день разбойник опять послал своим сообщникам две записки. Первая записка была похожа на предыдущие:

а) «Если будет подкуплена стража, то для совершения побега достаточно передать мне веревочную лестницу».

Вторая записка была полна пессимизма:

б) «Невозможно, чтобы стража была подкуплена, мне была передана лестница, и побег состоялся».

На третий день разбойник получил ответ: «Из каждой пары твоих высказываний истинно только одно». Какую информацию получил разбойник?

5. Совершено убийство. Подозреваются Браун, Джон и Смит. Один из них брат убитого, другой — сосед, а третий — случайный знакомый. Каждый из них сделал заявление.

Браун: Если ни я, ни Джон невиновны, то Смит тоже невиновен.

Смит: Чтобы обвинить меня и Брауна, достаточно признать Джона невиновным. Но Джон виновен. Значит, нельзя считать, что ни я, ни Браун невиновны.

Джон: Если меня сочтут виновным, то Смиту удастся оправдаться только тогда, когда оправдается Браун. Но виновен либо Смит, либо Браун. А я невиновен.

Следователь сообщил, что правду сказал только брат убитого, а остальные подозреваемые солгали. Кто убийца? Как фамилия убитого?

6. Коля пригласил свою сестру приехать к нему в гости. После этого он получил от нее три сообщения:

а) «Я поеду в гости, если только со мной поедет папа»;

б) «Чтобы я приехала, необходимо, чтобы меня сопровождала мама».

в) «Либо приедем мы с мамой, либо приедет только папа».

Когда приехали гости, оказалось, что из трех сообщений истинным было только одно. Кто приехал навестить Колю?

7. Придумайте примеры, иллюстрирующие действия разделительно-категорических силлогизмов, и проверьте истинность выводов. Дайте оценку характера вывода.

Практическая работа №9
Определение логического значения для высказываний типа
$\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$, $\forall x\exists yP(x,y)$, $\exists x\forall yP(x,y)$
Построение отрицания к предикатам.

1. Запишите на языке логики предикатов следующие высказывания и постройте отрицания к ним:

a) Некоторые действительные числа являются рациональными,
b) Ни одно простое число не является точным квадратом.
c) Некоторые четные числа не делятся на 8.
d) Всякое число, кратное 6, делится на 3.

2. Пусть *P(x)* обозначает *«x*—простое число», *Q(x)*-*«x*—четное число», *R (x)*—*«x*—целое число», *D(x,y)* -«а делит *y»*. Сформулируйте словами следующие высказывания, записанные на языке логики предикатов. Отметьте, какие из них истинные и какие ложные:

(a) $\forall x P(x) \to \urcorner Q(x)$;
(b) $\forall x (\urcorner P(x) \to \forall y (P(y) \to \urcorner D(x, y)))$;
(c) $\forall x (Q(x) \to \forall y (D(x, y) \to Q(y)))$;
(d) $\forall x \exists y (R(x) \wedge R(y) \to D(x, y))$;
(e) $\forall y \forall x (R(x) \wedge R(y) \to D(x, y))$;
(f) $\exists x \forall y (R(x) \wedge R(y) \to D(x, y))$.

3. Используя логические символы, запишите следующие высказывания:
a) Числа 5 и 12 не имеют общих делителей, отличных от +1 и —1.
b) Натуральное число, делящееся на 6, делится на 2 и на 3.
c) Для любого целого числа *x* существует такое целое число *y,* что *x = 2y* или *x = 2y+1.*
d) Для любого натурального числа существует натуральное число, которое больше его.
e) Существует наименьшее натуральное число.
4. Какое математическое предложение записано символами логики предикатов? Постройте отрицание определений:

а) $\forall a, \forall b, \exists c\ ((\log_a b = c) \wedge (a > 0) \wedge (b > 0) \wedge (a \neq 1)) \overset{aej}{\Leftrightarrow} ((a^c = b))$;

б) $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon \in R_+)\ \exists \delta \exists x\ ((x \in R) \wedge (0 < |x - x_0| < \delta)) \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$;

в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$;

г) $(a \parallel b) \Leftrightarrow (\exists \alpha((a \subset \alpha) \wedge (b \subset \alpha) \wedge (a \neq b)) \wedge (a \cap b = 0))$;

Практическая работа №10

Решение задач методом математической индукции

1. Докажите, что при любых $n \in N$ выражение:

а) $7^{2n} - 1$ делится на 24;
б) $13^n + 5$ делится на 6;
в) $6^n + 20n + 24$ делится на 25;
г) $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ делится на 8;
д) $4^n + 15n - 1$ кратно 9;
е) $3^{2n+2} + 8n - 9$ кратно 16.

2. Докажите справедливость формулы для суммы ряда:

а) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

в) $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$;

г) $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

д) $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

е) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!},\ \forall n \geq 2$;

РАЗДЕЛ 7. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

7.1. Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы

7.1.1. Методические рекомендации по составлению опорного конспекта

Основные требования, предъявляемые к содержанию и форме записи опорного конспекта.

1. Полнота изложения материала;
2. Последовательность и логичность в отражении темы;
3. Лаконичность записи: опорный конспект по объему должен составлять не более листа и воспроизводиться в устной форме за 5-7 минут;
4. Структурирование записей, т.е. изложение материала по пунктам в форме простого или сложного плана. При этом каждый блок должен выражать законченную мысль;
5. Расстановка акцентов, т.е. выделение ключевых слов, понятий с помощью рамок, шрифтов, различных цветов и графических приемов (столбик, диагональ и т.д.);
6. Наглядность;
7. Связь с материалами учебника, справочника и других видов учебной литературы.

Запишите название темы по предмету. Ознакомьтесь с необходимым материалом по тексту учебника, пособия, справочника и т.д. Выделите главное в изучаемом материале, составьте конспект в виде простых записей.

Выберите ключевые слова или понятия, отражающие суть изучаемой темы. В зависимости от цели составления опорного конспекта, изложение исходного текста может быть самым различным по форме, например: в виде слов, словосочетаний и предложений на уроках гуманитарного цикла; схем, таблиц и формул по физико-математическим дисциплинам. Также можно использовать рисунки и различные графические символы. Каждое из ключевых понятий должно воздействовать на читателя как опорный сигнал.

Продумайте способ «кодирования» знаний, выбрав для этого необходимые приемы.

Используйте прием сокращения слов, для экономии времени при составлении опорного конспекта. Обычно сокращаются слова, наиболее часто употребляемые на уроках, например: ОС (операционные системы), инф.(информация). Также вы можете использовать графические обозначения, отражающие суть излагаемого материала.

7.1.2. Методические рекомендации по подготовке доклада

Доклад - вид самостоятельной научно-исследовательской работы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее. Различают устный и письменный доклад (по содержанию, близкий к реферату).

В докладе соединяются три качества исследователя: умение провести исследование, умение преподнести результаты слушателям и квалифицированно ответить на вопросы.

Отличительной чертой доклада является научный, академический стиль. Академический стиль - это совершенно особый способ подачи текстового материала, наиболее подходящий для написания учебных и научных работ. Данный стиль определяет следующие нормы:

• предложения могут быть длинными и сложными;

• часто употребляются слова иностранного происхождения, различные термины;

• употребляются вводные конструкции типа “по всей видимости”, “на наш взгляд”;

• авторская позиция должна быть как можно менее выражена, то есть должны отсутствовать местоимения “я”, “моя (точка зрения)”;

Общая структура такого доклада может быть следующей:

1. Формулировка темы исследования (причем она должна быть не только актуальной, но и оригинальной, интересной по содержанию).

2. Актуальность исследования (чем интересно направление исследований, в чем заключается его важность, какие ученые работали в этой области, каким вопросам в данной теме уделялось недостаточное внимание, почему учащимся выбрана именно эта тема).

3. Цель работы (в общих чертах соответствует формулировке темы исследования и может уточнять ее).

4. Задачи исследования (конкретизируют цель работы, “раскладывая” ее на составляющие).

5. Гипотеза (научно обоснованное предположение о возможных результатах исследовательской работы. Формулируются в том случае, если работа носит экспериментальный характер).

6. Методика проведения исследования (подробное описание всех действий, связанных с получением результатов).

7. Результаты исследования. Краткое изложение новой информации, которую получил исследователь в процессе наблюдения или эксперимента. При изложении результатов желательно давать четкое и немногословное истолкование новым фактам. Полезно привести основные количественные показатели и продемонстрировать их на используемых в процессе доклада графиках и диаграммах.

8. Выводы исследования. Умозаключения, сформулированные в обобщенной, конспективной форме. Они кратко характеризуют основные полученные результаты и выявленные тенденции. Выводы желательно пронумеровать: обычно их не более 4 или 5.

Можно выделить следующие этапы работы над докладом.

1. Подбор и изучение основных источников по теме (как и при написании реферата, рекомендуется использовать не менее 8-10 источников).
2. Составление библиографии.
3. Обработка и систематизация материала. Подготовка выводов и обобщений.
4. Разработка плана доклада.
5. Написание.
6. Публичное выступление с результатами исследования.

Продолжительность выступления обычно не превышает 10-15 минут. Поэтому при подготовке доклада из текста работы отбирается самое главное. В докладе должно быть кратко отражено основное содержание всех глав и разделов исследовательской работы.

Для успешного выступления с докладом заучите значение всех терминов, которые употребляются в докладе.

При соблюдении этих правил у вас должен получиться интересный доклад, который, несомненно, будет высоко оценен преподавателем.

7.1.3. Методические рекомендации по реферированию темы

По форме студенческий реферат - это небольшое научное исследование. Хотя в реферате излагаются, преимущественно, идеи и их анализ, которые студент нашел в соответствующей литературе, тем не менее в его работе должны быть элементы самостоятельности и новизны. Большую помощь здесь окажут консультации, во время которых студент получает советы: где и как искать научную литературу; как оформить библиографию (список литературы по теме); как работать с научным трудом; каковы современные требования к научному описанию и каковы типовые части изложения.

При оценке реферата учитываются, в первую очередь, следующие критерии:

- соответствие требованиям программы курса;
- правильность выработанной студентом концепции описания проблемы;
- глубина проработки материала;
- правильность и полнота использования источников;
- оформление реферата.

Изучение теоретического материала по теме реферата не ставит перед вами задачу заучивания прочитанного, но, поскольку вы должны хорошо ориентироваться в специальной литературе, ему следует вести записи.

Объем реферата в среднем должен составлять 18-20 страниц рукописного или 12-15 страниц машинописного текста (не более 28-30 строк на странице, напечатанных через полтора интервала). Текст пишется (печатается) на одной стороне листа (шрифт 12 или 14).

В реферате обязательно должны быть представлены следующие структурные элементы:

1. План
2. Введение
3. Основная часть, содержащая несколько (3-4) разделов
4. Заключение
5. Библиография

Во Введении (объем не менее двух страниц) осуществляется постановка проблемы: объясняется выбор темы, ее значимость и актуальность. Кроме того, определяются цель и задачи реферата.

В Основной части излагается содержательная сторона реферата. Каждый из разделов, входящих в нее, должен быть озаглавлен и раскрывать одну из сторон рассматриваемого вопроса. Разделы по объему равноценны (3-5 страниц) и заканчиваются четкими выводами. Изложение материала должно быть четким, последовательным и соответствовать плану.

Методы описания материала могут быть различны. Кратко охарактеризуем основные из них.

Индуктивный метод - изложение материала от частного к общему. Студент начинает описание с конкретного факта, а затем делает обобщения и выводы.

Дедуктивный метод - изложение материала от общего к частному: сначала выдвигаются какие-то проблемы, а потом на конкретных примерах, фактах разъясняется их смысл.

Метод аналогии - сопоставление различных явлений, событий, фактов.

Концентрический метод - расположение материала вокруг главной проблемы, поднимаемой в реферате. Студент переходит от общего рассмотрения центрального вопроса к белее конкретному и углубленному анализу.

Ступенчатый метод - последовательное изложение одного вопроса за другим. Рассмотрев какую-либо проблему, студент уже больше не возвращается к ней.

Исторический метод - изложение материала в хронологической последовательности, описание и анализ изменений, которые произошли в том или ином предмете, в понимании того или иного явления в течением времени.

Использование различных методов изложения материала в одном и том же реферате позволяет сделать структуру основной части более оригинальной, нестандартной.

Вместе с тем, каким бы методом не пользовался студент, он должен помнить, что его работа без хорошо продуманной системы логических доводов, без аргументации будет неубедительной. Значимость, вес, сила аргументов должны нарастать постепенно, самые сильные доказательства в пользу определенной позиции лучше использовать в конце рассуждения.

7.1.4. Методические рекомендации по составлению аналитического обзора

Аналитический обзор - сокращенное изложение содержания первичных документов с основными фактическими сведениями и выводами. Аналитические обзоры составляются на основании книг, статей, газетных и журнальных публикаций и других источников информации. Главное требование, предъявляемое к аналитическому обзору, звучит так: вся информация должна быть представлена в сжатом и систематизированном виде.

Работа над аналитическим обзором начинается после того, как изучена литература и собран фактический материал. Первым ее шагом является составление плана, в котором определяется последовательность изложения материала. План помогает лучше продумать структуру аналитического обзора, определить, какие разделы оказались перегруженными материалом, где его недостаточно, какие вопросы следует опустить и т.д. Составление плана помогает избежать ошибок в построении текста.

Хороший аналитический обзор должен содержать ответы на следующие вопросы: кто совершал, что, где, когда и с какой целью совершалось. В нем должно содержаться как можно больше конкретной информации, имеющейся в исходных информационных материалах.

7.1.5. Методические рекомендации по работе с литературой

Работая с книгой, следует прежде всего определенным образом настроить себя, дать себе соответствующую установку. Студент может поставить перед собой задачу изучить по книге тот или иной вопрос, который предстоит освещать в реферате; критически проанализировать содержание книги; проверить, совпадает ли его оценка с мнением автора, других авторитетных лиц; выбрать для реферата наиболее яркие факты, примеры, интересные положения и т.д. Подобные установки помогут студенту более целенаправленно работать с книгой и прежде всего определить вид чтения: сплошное, выборочное, комбинированное. При сплошном чтении книга прочитывается полностью, от начала до конца, без каких-либо пропусков. Иногда для разрабатываемой темы достаточно изучить не всю книгу, а лишь отдельные ее разделы, главы, параграфы. Такое чтение называется выборочным. Комбинированное чтение - это сплошное чтение отдельных частей и выборочное других.

Работу над книгой следует начинать с предварительного знакомства с ней. Сначала читается титульный лист книги. Нередко на титульном листе указывается классификационная характеристика книги (учебник, учебное пособие, справочное пособие, словарь-справочник и др.), позволяющая определить ее назначение. Необходимо обратить внимание и на год издания книги. На титульном листе указывается также наименование издательства и место издания книги. Но на этом не заканчивается предварительное знакомство с книгой. Следует просмотреть оглавление, дающее представление об основных вопросах, которые в ней затрагиваются, обратить внимание на рисунки, схемы, таблицы.

Ознакомиться с книгой помогает и аннотация, которая помещена на обороте титульного листа или в конце книги. В ней кратко рассказывается о содержании книги., говорится о ее назначении, даются сведения об авторе и т.п.

Если в книге есть предисловие и послесловие, рекомендуется прочитать их. В предисловии рассказывается история написания книги, передается ее краткое содержание, характеризуются основные проблемы. В послесловии автор подводит итоги изложенного, кратко формулирует или повторяет главные положения работы.

7.1.5. Общие методические рекомендации по решению задач

1) Рекомендации для усвоения содержания задачи (1-й этап).

Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. Решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;

б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство -посылки и заключения.

в) Если задача геометрическая или связана с графическими объектами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые.

г) В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения.

2) Составление плана решения задачи (2-й этап). Составление плана решения задачи является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому крайне необходимо ответить на вопросы помогающие "открыть" идею ее решения:

а) Известна ли какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой.

б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна решающему, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее.

Можно попытаться сформулировать задачу иначе. Иными словами, попытайтесь перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуются либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попытайтесь преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомых или данных способствует более быстрому составлению плана решения.

3) Реализация плана решения задачи (3-й этап). План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачу рассматривает все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) Замените термины и символы их определениями. Так, термин «параллелограмм» заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны».

4) Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап). Получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение: 1) безошибочно, 2) обоснованно, 3) имеет исчерпывающий характер. Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи.

7.2. Методические рекомендации по организации и методическому сопровождению самостоятельной работы студентов

Одной из важнейших стратегических задач современной профессиональной школы является формирование профессиональной компетентности будущих специалистов. Квалификационные характеристики по всем специальностям среднего профессионального образования новых образовательных стандартов третьего поколения содержат такие требования, как умение осуществлять поиск, анализ и оценку информации. Одной из форм, помогающих формированию этого умения, являются продуманные и систематизированные, логически и целенаправленно разработанные задания и упражнения для самостоятельной работы студентов, в которых перед ними последовательно выдвигаются познавательные задачи, решая которые они осознанно и активно усваивают знания и учатся творчески применять их в новых условиях.

Целевые направления самостоятельной работы студентов:

1.Для овладения и углубления знаний:

- составление различных видов планов и тезисов пот тексту;
- конспектирование текста;
- составление тезауруса;
- ознакомление с нормативными документами;
- создание презентации.

2. Для закрепления знаний:

- работа с конспектом лекции;
- повторная работа с учебным материалом;
- составление плана ответа;
- составление различных таблиц.

3. Для систематизации учебного материала:

- подготовка ответов на контрольные вопросы;
- аналитическая обработка текста;
- подготовка сообщения, доклада;
- тестирование;
- составление кроссворда;
- формирование плаката;
- составление памятки.

4 .Для формирования практических и профессиональных умений.

-решение задач и упражнений по образцу;
-решение ситуативных и профессиональных задач;
- проведение анкетирования и исследования.

Средства обучения необходимы для организации самостоятельной работы:

1. Дидактические средства, которые могут быть источником самостоятельного приобретения знаний (первоисточники, документы, тексты художественных произведений, сборники задач и упражнений, журналы и газеты, учебные фильмы, карты, таблицы);

2. Технические средства, при помощи которых предъявляется учебная информация (компьютеры, аудиовидеотехника);

3. Средства, которые используют для руководства самостоятельной деятельностью студентов

(инструктивно-методические указания, карточки с дифференцированными заданиями для организации индивидуальной и групповой работы, карточки с алгоритмами выполнения заданий).

Разработка и применение средств обучения – это та сторона педагогической деятельности, в которой проявляется индивидуальное мастерство, творческий поиск преподавателя, его умение побудить студентов к творчеству.

Виды практических заданий для самостоятельной работы студентов

1. Составить опорный конспект по теме…
2. Сформулировать вопросы…
3. Сформулировать собственное мнение…
4. Продолжить фразу…
5. Дать определения следующим терминам…

6. Составить опорный конспект своего ответа.

7. Написать реферат.

8. Составить аналитический обзор по теме…

9. Разработать алгоритм последовательности действий…

10. Составить таблицу с целью систематизации материала…

11. Заполнить таблицу, используя…

12. Заполнить блок-схему…

13. Составить тезаурусное поле по теме…

14. Смоделировать конспект урока по теме…

15. Смоделировать домашнее задание.

16. Сделать самоанализ практики: эффективность использования приёмов, методов и средств воспитания детей.

17. Осуществить аналитический разбор публикации по заранее определённой преподавателем теме.

18. Составить тематический кроссворд.

19. Составить план текста, конспект.

20.Решить ситуационные задачи.

21.Подготовиться к семинару, деловой игре.

Приёмы самостоятельной работы студентов:

1. Работа с учебником.

Для обеспечения максимально возможного усвоения материала и с учётом индивидуальных особенностей студенов, можно предложить им следующие приёмы обработки информации учебника:

- конспектирование;
- составление плана учебного текста;
- тезирование;
- аннотирование;
- составление тематического тезауруса;
- выделение проблемы и нахождение путей её решения;
- самостоятельная постановка проблемы и нахождение в тексте путей её решения;
- определение алгоритма практических действий (план, схема).

2. Опорный конспект.

Зачастую педагог обучает от параграфа к параграфу, от пункта к пункту и лишь в конце темы пытается связать весь материал на

обобщающем уроке. Куда целесообразнее, даже с психологической точки зрения, дать студентам представление об изучаемой теме на первом уроке, искусно оформив её содержание как небольшой опорный конспект. Он нужен всем – и сильным, и слабым.

И тогда студенты не будут учиться сегодня, забыв выученное вчера и не зная того, что будет завтра.

Опорный конспект необходимо давать на этапе изучения нового материала, а потом использовать его при повторении.

Опорный конспект позволяет не только обобщать, повторять необходимый теоретический материал, но и даёт педагогу огромный выигрыш во времени при прохождении материала.

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

4. Хоменко, И. В. Основы логики. Учебник и практикум для СПО. - М.: Юрайт, 2016. - 328 с. (в процессе приобретения)
5. Спирина М. С., Спирин П.А. Дискретная математика. - М.: Академия, 2018.-368 с. (в процессе приобретения)
6. Спирина М. С., Спирин П.А. Дискретная математика. Сборник задач с алгоритмами решений - М.: Академия, 2018.-288 с. (в процессе приобретения)

Дополнительные источники:

4. Гончарова Г.А. Элементы дискретной математики: учебник для ССУЗ. – М.: ФОРУМ :ИНФРА- М, 2004.-128 с.
5. Челпанов, Г. И. Учебник логики. - М.: Либроком, 2016. - 264 с.
6. Струве, Г. Е. Элементарная логика. - М.: Либроком, 2015. - 168 с.

Интернет - ресурсы

4. Математическая логика: http://www.mathlog.h11.ru/logika.htm
5. Введение в математическую логику: http://lpcs.math.msu.su/vml2009/
6. Дискретная математика: http://www.univer.omsk.su/departs/compsci/kursi/disc/fr_logic.htm